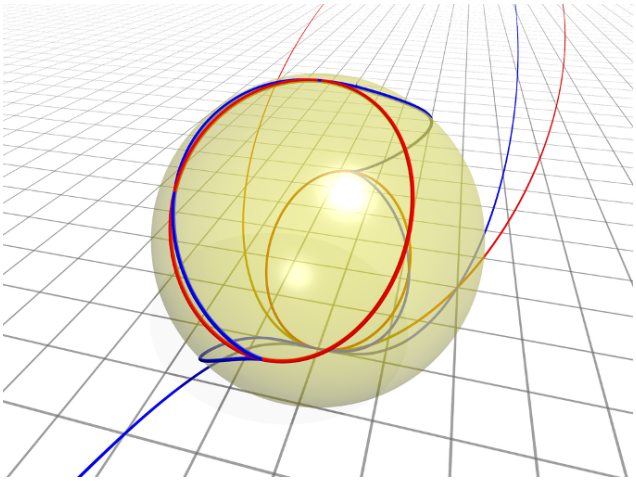
Neologismus

Ausgabe 08/2015

Foto: xylophon – flickr.com (Public Domain)

Landesverrat und andere Fragen – S. 4



Graphik: RupertMillard – commons.wikimedia.org (Public Domain)

Projektive Kurven und Riemannsche Flächen – S. 10

Foto: gfpeck – flickr.com (CC BY-ND 2.0)

Das gibt's doch gar nicht! – S. 17

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

wie Ihnen vielleicht aufgefallen ist, gab es im Juli keine Ausgabe unseres Magazins. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass ein Großteil der Redaktion verreist oder sich andersweitig Urlaub, Semesterferien oder vergleichbares gegönnt hat. Mit etwas Glück wird es hierzu vereinzelte Reise- oder Akademieberichte geben.

Wir möchten uns für die unangekündigte Redaktionspause entschuldigen und hoffen, dass Sie ebenfalls einen erholsamen Sommer erleben konnten. Ferner bemühen wir uns, die kommenden Ausgaben wieder angemessen füllen zu können. In diesem Sinne wünschen wir viel Freude mit der Lektüre der August-Ausgabe des ИEOLOGISMUS, die Ihnen hier vorliegt.

Mit freundlichen Grüßen

Florian Kranhold,
Chefredakteur,

Tübingen, der 6. September 2015

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2

1 Politik und Gesellschaft

Landesverrat und andere Fragen 4

Der stille Aufstand 8

2 Wissenschaft und Technik

Projektive Kurven, Riemannsche Flächen und Funktionenkörper, Teil 1 10

3 Feuilleton

Das gibt's doch gar nicht! 17

Der Mensch, seine Wahrnehmung und die Welt 20

4 Kreativ

Sommer lang 21

Chefredakteur:
Florian Kranhold

Layout:
Tobias Gerber, Florian Kranhold, Michael Thies
Erstellt mit LaTeX

Autoren:
Lukas Heimann, Florian Kranhold, Charlotte Mertz

Gastautoren:
Jana Willemsen

Redaktionsanschrift:
Florian Kranhold
Rottenburger Straße 8
72070 Tübingen

Kontakt:
neologismus-magazin.de
facebook.com/neologismus.magazin
info@neologismus-magazin.de

Die gedruckten Artikel geben nicht immer die Meinung der Redaktion wieder. Änderungen der eingereichten Artikel behalten wir uns vor. Trotz sorgfältiger Prüfung übernehmen wir keine Haftung für die Richtigkeit der abgedruckten Veröffentlichungen.

Der Neologismus steht unter einer *Creative Commons*-Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0 (Namensnennung, Nichtkommerziell, Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz, creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/). Zur Verwendung enthaltener Inhalte, die nicht durch diese Lizenz abgedeckt wird, nehmen Sie bitte Kontakt zu uns auf.

Veröffentlicht am 7. September 2015.

Politik und Gesellschaft

Landesverrat und andere Fragen

Wir brauchen mehr Debatten

VON LUKAS HEIMANN

Foto: xylophon – flickr.com (Public Domain)

Vorneweg: Dieser Artikel wird streckenweise zynisch, und das mit Absicht. Er wird einige Sachverhalte unzulässig vereinfachen. Aber er wird auch viele Fragen stellen, die wichtig für die Debatte sind und so zu selten gestellt werden – weil sie auch tiefer gehen als es die aktuell sehr machtpolitische Debatte tut.

Satirisch überspitzt und sachlich nicht ganz korrekt könnte man die Ereignisse der letzten Wochen so zusammenfassen: Generalbundesanwalt Range ermittelt gegen die, die anprangern, dass er seine Ermittlungen gegen die Überwachung durch Geheimdienste aus Mangel an Beweisen eingestellt hat, weil sie Beweise für eben jene Überwachung veröffentlicht haben. Jener Generalbundesanwalt, dessen Kompetenz nach lustigen Versprechern in Aussagen dazu, dass keine Hinweise zu einer Überwachung durch Dienste wie die „NASA“[1] im „sogenannten SNA-Komplex“[2] vorlägen, von seiner Fachaufsicht im Innenministerium nicht angezweifelt wurde[3] – durchaus mit dem Kommentar, man mische sich nicht in die Justiz ein –, der nun wegen Inkompetenz im Umgang mit der Pressefreiheit erst in seinen Ermittlungen gebremst und schließlich, nachdem er diesen Eingriff in die Justiz öffentlich moniert hatte, ganz in den Ruhestand entlassen wurde.

Nochmal von Anfang an: Der Blog *netzpolitik.org* hat Dokumente zum geplanten Ausbau der Internetüberwachung durch das Bundesamt für Verfassungsschutz veröffentlicht. Der Präsident des Verfassungsschutzes hat Anzeige wegen Landesverrat beim Generalbundesanwalt erhoben: Veröffentlichung von Staatsgeheimnissen, die die äußere Sicherheit der Bundesrepublik gefährdet. Der Bundesinnenminister, Vorgesetzter des Verfassungsschutzpräsidenten, will davon nichts gewusst haben. Der Bundesjustizminister, Vorgesetzter des General-

bundesanwalts, hingegen schon, er habe Bedenken geäußert. Irgendwann naturgemäß auch der Angeklagte von den Ermittlungen, der Blog geht damit an die Öffentlichkeit, die Presse greift den Eingriff in ihre ureigene Freiheit auf und es kommt von Seiten der Bundesregierung zum allgemeinen Schuld von sich Schieben. Köpfe rollen – worüber die Presse natürlich wieder dankend berichtet. Und während die Ermittlungen gegen die beiden Redakteure von *netzpolitik.org* eingestellt werden, verliert der Normalbürger schon wieder das Interesse.

Dabei wurden viele der grundsätzlicheren Fragen nicht gestellt. Das will ich im Folgenden tun.

Wir brauchen eine Debatte über die Unabhängigkeit von Behörden.

Wenn sich der Generalbundesanwalt darüber beschwert, dass ein Eingriff des Justizministers in seine Arbeit ein unzulässiger Eingriff in die Justiz sei, merkt der kundige Jurist sofort: Der Generalbundesanwalt hat als Teil der Exekutive organisatorisch mit der Justiz gar nichts zu tun; und der Justizminister ist, mit seinem Ministerium als Fachaufsicht der Bundesanwaltschaft, durchaus weisungsbefugt. Auch wenn er das in den seltensten Fällen wirklich tut – auch hier wurde nicht gewiesen, sondern nur an der Richtigkeit des Vorgehens gezweifelt und zu sensiblem Umgang mit dem Thema aufgerufen. Und natürlich nach einem gestörten Vertrauensverhältnis der Generalbundesanwalt in den Ruhestand geschickt. Dass Staatsanwälte Teil der Exekutive sind, hat, ohne mich da jetzt im Detail darüber informiert zu haben, bestimmt gute Gründe. Wir sollten darüber nachdenken: Welche sind das? Was spricht vielleicht dagegen? Wie unabhängig soll ein Generalbundesanwalt sein, und wie unabhängig ist er in Theorie und Praxis?

Ein weiteres Fachaufsichtsverhältnis besteht zwischen Bundesinnenministerium und Bundesamt für Verfassungsschutz – die, die *netzpolitik.org* angezeigt haben. Wie viel der zuständige Bundesminister von der Anklage wusste, ist umstritten (und es wurde ja auch zumindest einmal die Unwahrheit gesagt[4]). Wie viel Aufsicht liegt hier vor? Wie viel Aufsicht hätte stattfinden müssen? Diese Frage lässt sich auch auf den BND als anderen Geheimdienst und seine Fachaufsicht, das Bundeskanzleramt übertragen. Wie viel muss die Chefetage wissen? Darf sie sich, wie sie es momentan erfolgreich tut, aus kritischen Fällen wie Landesverratsanzeigen oder BND-Skandal erfolgreich heraushalten und hinter ihrer Unwissenheit verstecken? Eine Frage für die Verschwörungstheoretiker: Tut sie das vielleicht mit Absicht? Oder ist es so, dass sie vernünftigerweise auch wichtigeres zu tun hat und sich nicht persönlich um alles kümmern kann?

Wir brauchen eine Debatte über Geheimhaltung.

Wo der Haushalt einer Bundesbehörde zum Staatsgeheimnis erhoben wird, ist eine Debatte über Geheimhaltung nötig. Klar, ich kann verstehen, dass ein gewisses Maß an Geheimhaltung nötig ist. Ich gehöre nicht zu den Menschen, die Geheimdienste komplett verteufeln und abschaffen wollen, und die tragen schließlich das „geheim“ schon im Namen. Man kann geheime Überwachungsmaßnahmen gefährlicher Menschen nicht herausposaunen, das würde diese Maßnahmen unsinnig machen. Dennoch sollte eine Transparente Kontrolle der Gesamtheit der Maßnahmen möglich sein und nicht im geheimen stattfinden müssen. Warum tagt zum Beispiel das parlamentarische Kontrollgremium (PKG) zur Geheimdienstaufsicht nur fernab der Öffentlichkeit? Ich verstehe einzelne nicht öffentliche Sitzungen wie beim NSA-Untersuchungsausschuss – konkrete Maßnahmen wie gesagt dürfen auch unter Umständen geheim bleiben. Aber ist gibt es nicht auch die Möglichkeit zu öffentlicheren Debatten über das Thema auch im PKG? Ist es eine gute Maßnahme, dass seine Mitglieder nicht über den Inhalt der Sitzungen mit Dritten reden dürfen?

Ich kann auch verstehen, dass man in Verhandlungen zum Beispiel über TTIP seine Verhandlungsposition durch das komplette Offenlegen der eigenen Grenzen, wo man steht und wie weit man maximal gehen möchte, gravierend schwächt. (Außer, das machen nachher alle so. Dann hätten wir sehr schnell die für alle optimalen Ergebnisse. Nur stößt das, wie alle kooperativen Ansätze, gegen die Spieletheorie und ist ein klassisches Gefangenendilemma: Würden beide den offenen Ansatz wählen, wäre das Ergebnis optimal. Betrügt einer den anderen, ist das Ergebnis für den Lügner noch besser, für den Belogenen aber fatal. Also lügen beide, was zwar nicht optimal, für beide aber hinnehmbar ist.[5]) Aber wie weit wollen wir da als Gesellschaft mit der Geheimhaltung gehen? Grundsätzlich haben wir ja eine demokratisch legitimierte Regierung, die sich um die Verhandlungen kümmert. Ist das Maß an Vertrauen, das wir in sie setzen dürfen, groß genug für diese Geheimhaltung? Oder ist es weltfremd und rückschrittlich, gegen diese Art der globalen Politik zu sein?

Ganz grundsätzlich ist das Problem des Verhältnisses Volk-Bundesregierung eines, dass die Wirtschaftswissenschaft als „Prinzipal-Agent-Theorie“[6] kennt: Wir, das Volk, sind der Prinzipal. Wir beauftragen die Regierung als unseren Agenten, um unter der Wahrung unserer politischen und Freiheitsrechte für uns politisch zu agieren und zum Beispiel über solche Verträge zu verhandeln. Dabei ist es für uns relativ uninteressant, was der Agent genau tut, solange das Ergebnis unseren Erwartungen entspricht. Jetzt haben aber nicht nur wir Erwartungen und wollen den Nutzen für uns maximieren, sondern eben auch die Regierung, die eigene, den unseren unter Umständen entgegengesetzte Ziele verfolgt: Machterhalt um jeden Preis wäre hier ein prominentes Beispiel, Skandale und für die Regierung negative Informationen sollten nicht an die Öffentlichkeit gelangen. (Wer jetzt sagt, sowas

passiert nicht, sollte einen Blick auf die aktuelle Berichterstattung über die Türkei werfen: Dort wird der Regierung vorgeworfen, zum eigenen Machtstreben und Machterhalt gegen die demokratischen Interessen der Bevölkerung fast einen Krieg gegen eine (verbotene) Partei zu führen, um die Opposition zu schwächen und aus dem Parlament zu bringen.[7]) Da die Regierung allerdings auf Grund ihrer Position und ihrer alltäglichen Arbeit an der ihr von uns zugeteilten Aufgabe einen sehr großen Wissensvorsprung vor uns hat (man spricht von „Informationsasymmetrie“), hat sie neben dem Motiv nun auch die Möglichkeit, zu dem Nachteil des Volks als Prinzipal zu handeln. So können Skandale vertuscht oder mit einer Hinhaltetaktik zumindest so lange hinausgezögert werden, bis auch der letzte das Interesse verloren hat. Die Prinzipal-Agent-Theorie schlägt eine Lösungen für das Problem vor: Neben geeigneter Auswahl der Agenten (die wir im Grunde durch Wahlen ja schon haben sollten) geht es dabei um ein Anreizsystem für den Agenten, im Sinne des Prinzipals zu handeln, und verschiedene Formen der Kontrolle, um den Wissensunterschied auszugleichen.

Auf dieser Basis müsste also gefragt werden: Welche Anreizsysteme gibt es für die Regierung, in unserem Interesse zu handeln, das z. B. neben guten Vertragsabschlüssen und Sicherheit vor Terroristen auch unsere demokratischen und unsere Freiheitsrechte umfasst? Reichen die aus? Welche neuen Systeme sind denkbar? Außerdem: Wie wird die Kontrolle momentan gehandhabt? Reicht das aus? Wie könnte noch kontrolliert werden?

Oder wird schon zu viel kontrolliert und vor allem illegal veröffentlicht, was wiederum allem, was wir durch Geheimhaltung an positiven Effekten aufbauen, schadet? Letztendlich ist die große Frage: Was muss wie geheim sein?

Wir brauchen eine Debatte über Presse im 21. Jahrhundert.

Wie man leicht erkennen kann, stammt der Begriff der „Presse“ noch aus Zeiten, in denen Journalisten ihre Erzeugnisse nur in der in Papier gegossenen textuellen Form der Zeitung veröffentlichen konnten. Seitdem hat sich viel getan: Zuerst haben wir durch den Rundfunk eine Ausweitung des Journalismus auf Ton und Bewegtbild erlebt, die trotz ihrer Ferne zum technischen Werkzeug der „Presse“ auch irgendwie unter die „Pressefreiheit“ fallen, die um die „Rundfunkfreiheit“ erweitert wurde. Mit dem Internet kommt eine neue Klasse von Kleinstjournalisten im Selbstverlag dazu: Blogger. Und da wird es dann schnell unscharf: Ist im Social Web, wo jeder Nutzer in Sekunden einen Beitrag verfassen kann, jeder ein Journalist? Bin ich mit meinem in vielen Teilen auch privatem Blog ein Journalist? Bin ich das überhaupt, wenn ich für den Neologismus schreibe?

Artikel 5 des Grundgesetzes unterscheidet hier nicht wirklich scharf zwischen Meinungs-, Presse- und Rundfunkfreiheit. Das Bundesverfassungsgericht wurde da in seinem Urteil zur Spiegel-Affäre von 1966, dem wie *netzpolitik.org* Landesverrat vorgeworfen wurde, konkreter: „Eine freie, nicht von der öffentlichen Gewalt gelenkte, keiner Zensur unterworfene Presse ist ein Wesenselement des freiheitlichen Staates; insbesondere ist eine freie, regelmäßig erscheinende politische Presse für die moderne Demokratie unentbehrlich. […] Es gehört danach zu den legitimen Aufgaben der Presse, die grundsätzliche Verteidigungskonzeption einer Regierung […] und die richtige Verwendung der für militärische Zwecke bereitgestellten Haushaltsmittel zu erörtern und die Öffentlichkeit über diese Fragen und die zu ihrer Beurteilung wesentlichen Sachverhalte zu informieren.“[8] Natürlich wird hier konkret Bezug auf die damalige Berichterstattung des Spiegels zur Bundeswehr genommen, aber der Grundgedanke ist klar: Das Thema ist auf grundsätzliche Art von Relevanz für die öffentliche Debatte, also hat die Presse sogar die Aufgabe geheime Dokumente zu veröffentlichen – von normalen Bürgern wird hier nicht gesprochen, sie haben dieses Recht nicht.

Für den aktuellen Fall könnte man also mutmaßen: Hätte irgendjemand zum Beispiel aus dem Verfassungsschutz die geheimen Dokumente selbst veröffentlicht (zum Beispiel öffentlich auf Facebook gepostet oder sich auf der *re:publica*, einer Konferenz rund um die digitale Gesellschaft, im Rahmen eines Vortrags laut vorgelesen), hätte man ihn wahrscheinlich entlassen und erfolgreich wegen so etwas wie Geheimnisverrat ins Gefängnis gebracht. Warum dürfen Journalisten die gleichen Dokumente, die doch genauso geheim sind, die Dokumente dann veröffentlichen? Auch umgekehrt wird ein Schuh draus: Warum dürfen Privatleute so etwas nicht? In den USA gibt es zumindest auf dem Papier Whistleblowerschutz, der Maßnahmen einer Regierungsorganisation gegen jemanden, der Missstände in dieser Organisation publik gemacht hat, verbietet.

Im Kontext „Presse oder nicht“ hat es also keine geringe Bedeutung, wenn Lorenz Hemicker den Bloggern von *netzpolitik.org* in der FAZ[9] subtil vorwirft, gar keine Journalisten zu sein, weil sie nicht neutral genug berichten wöllten, sondern eine eigene politische Agenda verfolgen. Wie starke Meinungen darf Presse dann verbreiten? Wie neutral muss sie sein? Und gehen wir mal von vollkommener Neutralität aus, man stellt nur die unterschiedlichen Standpunkte dar: Wie viel Raum räumt man den verschiedenen Positionen ein? Allen (auch den Verschwörungstheoretikern, die glauben, die Bundesrepublik sei in Wahrheit eine GmbH) gleich viel? Oder verteilt man die Anteile proportional zum Anteil der Bevölkerung, die diese Position vertreten? George Orwell wird das Zitat zugeschrieben, „Journalismus ist etwas zu veröffentlichen, was andere nicht wollen, dass es veröffentlicht wird.“ Sollte man also nicht irgendwie das Gegenteil tun und An-

teile so verteilen, dass gerade die Meinung mit den wenigsten Anhängern den größten Stellenwert eingeräumt bekommt? Egal wie neutral man versucht zu sein, allein dadurch, dass man entscheidet, wer wie viel zu sagen bekommt, verliert man seine Neutralität. Und die Entscheidung von sich wegzudrücken und zu sagen „Wenn wir zu Position A einfach mehr Material haben, dass besser aufbereitet ist als das von Position B, dann kriegt diese auch logischerweise mehr Text“ kann auch nicht das Gelbe vom Ei sein.

Die „Aktivisten von *netzpolitik.org*“ sind auf jeden Fall (wie sicher viele andere Menschen weltweit auch) davon überzeugt, „das Richtige“ zu tun, was immer das im Einzelfall bedeutet und wie man das objektiv verifizieren kann. Für *netzpolitik.org* ist „das Richtige“ vielleicht, die Einhaltung der im Grundgesetz festgelegten Grundrechte durch kritische Berichterstattung sicherzustellen, mit Fokus auf das Thema Internet. Lässt man das Internet weg, ist das sicherlich auch irgendwo „Agenda“ der FAZ – schließlich verbreitet auch die nichts, was grob verfassungswidrig wäre. Denn natürlich hat auch die FAZ irgendwo einen moralischen Anker, wenngleich der wahrscheinlich im politischen Spektrum weniger links ist als der von *netzpolitik.org*.

Dabei darf auf keinen Fall vergessen werden, dass eine Anpassung des Grundgesetzes genauso möglich ist wie die von EU-Verträgen über das Verbot von Schuldenschnitten zum Beispiel für Griechenland (auch wenn unsere Regierung momentan das eine wie das andere nicht tut und sich damit begnügt, ersteres zu überschreiten statt zu ändern, dann dafür von Verfassungsrichtern gerügt zu werden, um daraufhin laut über eine Einschränkung deren Macht nachzudenken). Beide sind wie jedes Gesetz Ausdruck eines ganz bestimmten politischen Willens – wenn auch schwerer zu ändern als normale Gesetze.

Das Grundgesetz kann also auch nicht immer absolutes Maß der Dinge sein – aber was dann? Auch die Annahme, dass ein Mittelweg zwischen zwei (in unserem Fall politischen) Extremen die richtige Lösung ist, ist falsch und sogar ein anerkannter logischer Fehlschluss.

Aber muss man denn immer vollends neutral sein? Das Bundesverfassungsgericht hat ebenfalls im Spiegel-Urteil gesagt: „[Die Presse] nimmt selbst dazu Stellung und wirkt damit als orientierende Kraft in der öffentlichen Auseinandersetzung.“ Aha, Presse darf also doch eine Meinung vertreten und soll es sogar. Wohlgemerkt muss sie nicht unbedingt das komplette Meinungsspektrum abbilden, sie ist nur eine orientierende Kraft von vielen in einer öffentlichen Debatte.

Das ist meiner Meinung nach das einzige wirklich Gute an Talkshows: Die Gäste repräsentieren unterschiedliche Meinungen einer Debatte klar und deutlich auf – als Zuschauer lässt man sich diese Meinungen erklären und gegeneinander behaupten, und was einem am Ende am besten gefällt, macht man zu seiner eigenen Meinung – oder man wählt eine Zwischenmeinung.

Als Journalist muss man professionell dagegen sein, um kritisch über ein Thema zu berichten. Das haben zumindest viele Journalisten[10] am Interview YouTubers LeFloid mit Bundeskanzlerin Angela Merkel vor kurzem bemängelt, dass er eben offen auf einer persönlichen Ebene zustimmend war.

Aus den letzten Absätzen ergibt sich die Frage: Muss Presse die Meinung vertreten, die sonst nicht zu Gehör käme?

Wir brauchen eine Debatte.

Zu guter Letzt möchte ich noch ein Thema anschneiden, dass das Transparenzthema auf die Presse überträgt. Journalismus ist ab einer gewissen Größe immer irgendwo mit Kosten verbunden. Wenn also jemand die (neutrale) Meinung aus einem journalistischen Erzeugnis einholt, muss er sich immer fragen, wer diese Kosten bezahlt und wie viel Einfluss er damit auf den Inhalt hat. Private Financiers? Werbepartner? Ist man das vielleicht selbst – Wer würde schon eine Zeitung kaufen, in der (zu politischen Themen) nur steht, alles sei soweit in Ordnung, man könne sich wieder schlafen legen?

Alles in allem lässt sich also sagen: Wir brauchen mehr grundsätzliche Debatten. Debatten, die sich nicht auf technische Detailfragen beschränken wie „Welche Geheimhaltungsstufe hätte dieses Dokument haben dürfen?“, „Hat der Generalbundesanwalt in diesem Fall richtig gehandelt?“ oder auch „Sollen eingetragene Lebenspartnerschaften auch vom Ehegattensplitting Gebrauch machen dürfen?“. Die Welt hat und wird sich verändern, und obwohl die Antworten auf alle dieser grundsätzlichen Fragen vielleicht nicht kompliziert, aber immerhin sehr schwer sind, müssen wir dennoch versuchen, sie zu finden. Diskutiert also!

---

[1] youtube.com/watch?v=vySPJKiSz-PQ (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:31)

[2] youtube.com/watch?v=4Hl-vQskKM4A (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:32)

[3] youtube.com/watch?v=ONeIkieeCZY (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:32)

[4] netzpolitik.org/2015/das-innenministerium-hat-gelogen-und-war-ueber-landesverrat-umfassend-informiert/ (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:33)

[5] de.wikipedia.org/wiki/Gefangenendilemma (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:34)

[6] https://de.wikipedia.org/wiki/Prinzipal-Agent-Theorie (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:35)

[7] heute.de/erdogan-und-die-pkk-eskalation-in-der-tuerkei-als-politisches-kalkuel-39598640.html (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:36)

[8] telemedicus.info/urteile/Presserecht/Vertraulichkeit-der-Redaktionsarbeit/180-BVerfG-Az-1-BvR-58662,-61063-und-51264-Spiegel.html (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:37)

[9] faz.net/aktuell/politik/inland/wer-sind-die-blogger-von-netzpolitik-org-13735090.html (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:37)

[10] Siehe etwa faz.net/aktuell/feuilleton/medien/tv-kritik/youtuber-le-floid-interview-merkel-13701378.html (abgerufen am 06. 09. 2015, 15:38)

Der stille Aufstand

Arbeitstitel: Warum die Anständigen schweigen

VON LUKAS HEIMANN

Foto: strassenstriche.net – flickr.com (CC BY-NC 2.0)

Eigentlich sollte dieser Artikel anders werden. Er sollte den Titel tragen „Warum die Anständigen schweigen“. Die Idee zu diesem Artikel stammt von einem Zeitpunkt, da war der Kommentar in der ARD von Anja Reschke zum „Aufstand der Anständigen“ erst ein paar Wochen alt.[1] Schon im Jahr 2000 hat der damalige Bundeskanzler Gerhard Schröder nach einem Brandanschlag auf eine Synagoge unter diesem Titel in einer Rede eine Reaktion der Zivilgesellschaft gegen Rechts gefordert. Heute brennen nicht Synagogen, sondern Flüchtlingsunterkünfte.

2000 war ich noch zu jung, um das wirklich mitzubekommen; dafür treffen mich die Bilder von ausgebrannten Flüchtlingsunterkünften heute umso heftiger. Ein kleiner Teil der Bevölkerung scheint das jedoch anders zu sehen. Das sind dann die Menschen, die in Heidenau und anderswo gegen Flüchtlinge demonstrieren. Ich empfehle, sich einmal dieses Video einer „besorgten Bürgerin“, einer „Asylkritikerin“ anzusehen.[2] Auch das erschreckt. Natürlich weiß ich, dass nicht alle so sind. Doch wie Frau Reschke in ihrem Kommentar so treffend feststellt: Sie werden mutiger, öffentlicher und man müsste ihnen lauter widersprechen. Ich habe mich also vor zwei Wochen gefragt: Wo bleibt er denn, der Aufstand der Zivilgesellschaft? Und ich habe überlegt, warum er nicht kommt.

Ein Hauptproblem, das ich sehe, ist: Niemand will die Flüchtlinge wirklich haben. Natürlich nehmen wir hier in Deutschland verglichen zum Rest Europas sehr viele Flüchtlinge auf, die nach dem Dublin-Abkommen eigentlich auf dem Weg hierher schon längst in Griechenland, Ungarn oder Österreich hätten bleiben sollen. Also stoßen wir eine Debatte über „gerechte Verteilung“ der Flüchtlinge in Europa an – eine Quote oder Ähnliches. Aber wenn wir ehrlich sind, wird diese Debatte von unserer Regierung nur forciert, weil wir im Falle der propagierten Quote weniger Menschen aufnehmen müssten. Wir würden sie in einer anderen Situation wohl eher nicht führen wollen. Damit will ich nicht sagen, dass diese Debatte unwichtig oder falsch ist (denn das ist sie sicher nicht), aber sie transportiert die unterschwellige Aussage: Grundsätzlich wollen wir weniger Flüchtlinge aufnehmen.

Flüchtlinge sind ja auch ein finanzielles Problem. Ihre Unterbringung und Verpflegung kostet. Die Kommunen sagen, die Länder müssten sie finanziell stärker unterstützen; die wiederum fordern mehr Geld vom Bund. Da sind andere Ideen günstiger: Abschreckung vor der Reise hierher schon im Heimatland und schnelle Abschiebung zum Beispiel für „Wirtschaftsflüchtlinge“ aus dem Balkan; oder schlicht das physische Aufhalten von Flüchtlingen an den Außengrenzen der EU. Tendenziell „rechte“ Ideen.

Letztendlich lebt die Politik der Bevölkerung das Problem vor und zeigt zusätzlich Handlungsunfähigkeit und Hilflosigkeit. Die „Anständigen“ sehen die Politik auf allen Ebenen versagen – und wenn die schon nichts tun können, was soll ich dann erst machen?

Die Nachrichten verstärken dieses Bild. Nachrichtensendungen beschäftigen sich neben dem Wetter fast vollständig mit dem Flüchtlingsthema und zeigen die Bilder von Flüchtlingswellen, die nach Europa rollen. Überforderung überall, das Militär unterstützt übergangsweise. Das ZDF zeigt im *heute-*

journal einen Reporter, der irgendwie mit den Flüchtlingen aus Serbien über Bahngleise nach Ungarn gelaufen ist, wo die Polizei die Menschen aufgegriffen hat, die nicht schon vorher in den teuren Bus von windigen Schleppern gestiegen sind, der auch gezeigt wurde. Auch diese Bilder verängstigen; niemand will das hier in Deutschland haben. Natürlich werden auch „Heldentaten“ gezeigt, wo einzelne Menschen Flüchtlinge aufnehmen. Allerdings überwiegt das Gefühl, dass das bei dem Ansturm nicht auf Dauer funktionieren kann. Das Gefühl der Hilflosigkeit lähmt.

Da hilft es auch nicht, auf Facebook ein einfaches „Refugees Welcome“ zu posten, ohne danach wirklich etwas zu tun. Das ist in etwa das digitale Äquivalent zu „Ich schicke eine Postkarte nach Heidenau, auf denen ich den Flüchtlingen liebe Grüße ausrichte“, während direkt vor der Unterkunft der Adressaten die „Asylkritiker“ stehen. Das weiß der Anständige, der nicht die Zeit oder den Mut oder das Geld hat, tatkräftig oder finanziell zu helfen, oder sich zwischen Flüchtlingsunterkunft und Aufmarsch der Asylkritiker zu stellen. Also schweigt er. Vielleicht denkt er sich auch, das sei Aufgabe der Politik, schließlich habe er die für genau solche Aufgaben gewählt. Wer jedoch nicht schweigt, sind die überzeugten Rechten. Und so kippt die politische Meinung nach rechts.

Erich Kästner hat 1931 „Fabian“, seinen einzigen Roman für Erwachsene, veröffentlicht. In ihm beobachtet der Protagonist, den schon der Untertitel als „Moralisten“ bezeichnet, den „Tanz auf dem Vulkan“, den Zerfall der Weimarer Republik. Er erkennt das unmoralische in jeder Szene, die er durch das wilde Berlin reist, und kann doch nichts tun. Sein einziger Ausweg ist die Flucht in die Berge – eine metaphorische Darstellung für den Rückzug ins Private, die „innere Emigration“, die neben Kästner auch weitere Künstler in der darauf folgenden Zeit des Dritten Reichs vollzogen.

Eine Frage, die ich mit Blick auf diesen Roman stellen möchte: Ergeht es uns gerade so ähnlich? Sind wir auch Moralisten, denen die Hände gebunden sind? Das lässt sich natürlich erst in der Retrospektive erkennen. Allerdings ist es ein sehr bequemes Bild: Ich bin der Moralist, auf der richtigen Seite, aber leider machtlos. Ich kann gar nichts ändern, und bin auch von den negativen Aspekten zu wenig betroffen, um das wirklich zu wollen. Eine Frau aus Freital hat in einem Interview auf die Frage, ob es nicht schlimm wäre, dass da Steine auf Menschen geworfen werden, recht treffend geantwortet: „Die werfen ja nicht auf Deutsche.“[3] Alles andere ist bedauerlich, aber immerhin bin ich sicher.

Aus dem Netz hört man die Forderung an Politik und Medien: „Nennt sie Nazis!“ Die Asylkritiker und besorgten Bürger. Alle. Aber wie Don Alphonso im Blog *Deus ex Machina* bei der FAZ feststellt: Das hilft nicht unbedingt. Denn „[w]ann immer man auf solche Leute trifft, geht es um das Gute, das Richtige, und allenfalls um bedauerliche Notwendigkeiten. Wenn Leute sagen, sie sind kein Nazi, aber – dann meinen sie das so, und keine pauschale Verurteilung wird sie vom Gegenteil überzeugen.“[4] Er berichtet unter anderem von der Erfahrung aus Ungarn, wo an der Wahl der rechten Regierung sicher nicht die Medien Schuld sind, die die Partei im Wahlkampf als einen Tick zu wenig rechts dargestellt hat. Auch in Österreich mit der FPÖ oder Frankreich mit der Front National kritisieren Medien den Rechtspopulismus, der aber davon unbeeindruckt immer mehr Stimmen gewinnen kann. Sein Fazit: Menschen pauschal als Nazis zu beschimpfen, hilft nicht und beendet einfach nur eine vielleicht sogar konstruktive Diskussion.

Aber das stimmt nur teilweise. Ich bin davon überzeugt, dass Vorbilder der Menschen etwas bewegen können. Politiker und Medien sind das nicht mehr. Aber Prominente können die Menschen noch wachrütteln, auch wenn das zu heftigem Widerstand der radikaleren Teile der „Asylkritiker“ führt. Wer in seinem Weltbild noch nicht vollends festgefahren ist, wird seine Position dann zumindest nochmal überdenken. Yoko und Klaas[5] sind da ein gutes Beispiel mit dem Video an ihre Fans. Til Schweiger geht sogar noch weiter und hilft zusätzlich zu seinem öffentlichen Auftreten mit dem Bau einer Unterkunft.

Und neben diesen Promis brauchen wir auch die viel beschworene „Mitte der Gesellschaft“, die sich zum Grundgesetz und zu einer Willkommenskultur für Flüchtlinge bekennt. Vor zwei Wochen dachte ich noch, so etwas würde noch nicht wirklich bestehen. Klar, es gab (und gibt immer noch) auch außerordentlich gute Aktionen. Mir ist da im Internet *Blogger Für Flüchtlinge*[6] über den Weg gelaufen. Aber mehr war damals nicht zu erkennen. Doch inzwischen habe ich gesehen, dass eine Reaktion auf die rechten Äußerungen in Heidenau, Freital und anderswo anläuft. Menschen spenden Kleidung und Geld für Flüchtlinge. Am Wochenende habe ich in einer katholischen Kirche eine Ausstellung und ein klares Bekenntnis zu Gastfreundschaft gegenüber Flüchtlingen gesehen – ein starkes Zeichen, wo in christlichen Kreisen oft auch die Angst vor der fremden Religion Islam grassiert. Eine Reaktion beginnt. Sie ist vielleicht nicht so laut wie die der Asylkritiker, aber weit effektiver.

Was kann man also tun? Man kann ganz grundsätzlich Interesse am Thema zeigen – sachlich, mehr als „Refugees Welcome“ auf Facebook. Nachfragen, Politikern Post schicken. Nicht benutzte Kleidung, oder Geld spenden. Haltung zeigen. Denn, ja: Wir brauchen einen Aufstand der Anständigen.

---

[1] facebook.com/panorama.de/videos/672503106220696/?hc_location=ufi (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:02)

[2] youtube.com/watch?v=XMpQS_GgrRQ (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:03)

[3] youtube.com/watch?v=7dP4yCfw9rU (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:03)

[4] blogs.faz.net/deus/2015/08/26/wir-sind-das-pack-2846/ (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:05)

[5] youtube.com/watch?v=tBHMz-COn2Sk (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:06)

[6] blogger-fuer-fluechtlinge.de/ sowie twitter.com/hashtag/bloggerfürflüchtlinge (abgerufen am 07. 09. 2015, 14:07)

Wissenschaft und Technik

Projektive Kurven, Riemannsche Flächen und Funktionenkörper

Teil 1: Grundlagen und Projektive Kurven

VON FLORIAN KRANHOLD

Der vorliegende, auf mehrere Ausgaben verteilte Artikel, gibt im Wesentlichen den Inhalt meiner Bachelorarbeit wieder, in Zuge derer ich projektive Kurven, sehr algebraische Objekte, mit Riemannschen Flächen, sehr analytischen Objekten verglichen habe.

Projektive Varietäten sind bis auf Isomorphie abgeschlossene Teilmengen des projektiven Raumes, der mit einer algebraisch motivierten Topologie und Strukturgabe versehen wurde. Weist man ihnen einen Funktionenkörper zu, so stellt man fest, dass man sich auf offene Teilmengen zurückziehen kann und gelangt so zum Konzept der birationalen Äquivalenz zwischen quasiprojektiven Varietäten. Hier erhalten wir einen ersten Äquivalenzsatz. Anschließend betrachten wir Kurven, d. h. zariski-topologisch eindimensionale Varietäten, und versuchen, den bisher analytisch motivierten Begriff der Regularität algebraisch durch Bewertungsringe zu beschreiben. Erstaunlich ist, dass im Falle projektiver nichtsingulärer Kurven birationale Äquivalenz gleichbedeutend mit echter Isomorphie ist, sodass unter bestimmten Voraussetzungen die obige Kategorienäquivalenz um eine viel speziellere dritte Kategorie erweitert werden kann.

Riemannsche Flächen auf der anderen Seite sind reell-zweidimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten mit der Zusatzeigenschaft, dass ihre Kartenwechsel biholomorph sind. Zusammen mit einer geeigneten Garbe und einem dadurch kanonisch gegebenen Morphismenbegriff werden die kompakten Riemannschen Flächen zusammen mit den nichtkonstanten Morphismen zu einer Kategorie. Hierbei steht vor allem ein neuer Funktionenkörper, nämlich der der meromorphen Funktionen, d. h. der Morphismen von einer kompakten Riemannschen Fläche auf die Riemannsche Sphäre, im Vordergrund. Durch einige topologische Betrachtungen bekommt man hierdurch ein Äquivalent zum algebraischen Abbildungsgrad definiert.

Schließlich wollen wir die Kategorie der Riemannschen Flächen mit der der projektiven Kurven zusammenbringen. Dazu werden wir zunächst den Transzendenzgrad des Körpers der meromorphen Funktionen kontrollieren, was in großen Teilen ohne den Satz von Riemann-Roch gelingt. Wieder mithilfe einiger topologischer Überlegungen stellen wir fest, dass der Körper endlich erzeugt ist. Mithilfe des Satzes vom primitiven Element erhalten wir zwei ausgezeichnete meromorphe Funktionen, die uns schließlich den abschließenden Nachweis der wesentlichen Surjektivität und der Volltreue unseres letzten Funktors ermöglichen.

Abschließend wird der Zusammenhang am Beispiel komplexer Tori und elliptischer Kurven veranschaulicht, wobei zu diesem Zwecke die Weierstraßsche $\wp$-Funktion mit Mitteln der Funktionentheorie untersucht wird.

Grundlagen

Grundbegriffe und Kategorientheorie

Definition 1.1.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für zwei $\mathbb{K}$-Algebren $\mathbb{K} \subseteq A, A'$ (oder Körpererweiterungen im Speziellen) sei $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A')$ die Menge der $\mathbb{K}$-*Algebrenhomomorphismen*. Eine Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt ferner *n-Erweiterung*, falls $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ endlich erzeugt ist und $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) = n$ gilt.

Definition 1.1.2. Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Kategorien.

(i) $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen *äquivalent* bzw. *antiäquivalent*, falls es einen kovarianten bzw. kontravarianten wesentlich surjektiven volltreuen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ oder $: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ gibt.

(ii) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ zwei Funktoren. Eine Vorschrift τ, die jedem Objekt X aus $\mathfrak{C}$ einen Morphismus $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X)) \ni \tau_X\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}'(X)$ zuordnet, heißt *natürliche Transformation* zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$, falls für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}'(Y) \arrow[d, "(f)"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\tau_X"] & \mathcal{F}'(X) \end{tikzcd}$$

kommutativ wird. Falls für alle Objekte X die Abbildung

τ_X ein Isomorphismus ist, so heißt τ *natürlicher Isomorphismus.*

(iii) Zwei Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ heißen *wesentlich invers*, falls es natürliche Isomorphismen $\tau^{\mathfrak{C}}$ zwischen $\circ\mathcal{F}$ und $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ sowie $\tau^{\mathfrak{D}}$ zwischen $\mathcal{F}\circ$ und $\mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ gibt.

Proposition 1.1.3. *Für Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind äquivalent bzw. antiäquivalent.*

(ii) *Es gibt wesentlich inverse Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$.*

Insb. ist „als Kategorie äquivalent sein“ eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Siehe [Har07, S. 3] □

Erinnerung 1.1.4.

(i) Ein topologischer Raum (X, Ω) zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ heißt *Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen*, notiere $(X, \mathcal{O}_X)$, falls alle $\mathcal{O}_X(U)$ $\mathbb{K}$-Algebren von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{K}$ mit punktweisen Verknüpfungen sind.

(ii) Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $\mathbb{K}$-Funktionen heißt *Morphismus*, falls für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ auch $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ gilt.

(iii) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen und $X' \subseteq X$ so ist X' zusammen mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe wieder ein Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

(iv) Ist $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen und $f(X) \subseteq Y' \subseteq Y$, so ist $\varphi\colon X \to Y'$ ebenfalls ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

Etwas Topologie

Definition 1.2.1. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

(i) (X, Ω) genüge dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, falls er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

(ii) (X, Ω) heißt *quasikompakt*, falls jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_j}\}_{j=1}^{r}$ besitzt, und *kompakt*, wenn X zusätzlich hausdorffsch ist.

(iii) (X, Ω) heißt *lokalkompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

(iv) (X, Ω) heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Erinnerung 1.2.2.

(i) Sowohl die Hausdorff-Eigenschaft als auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom übertragen sich auf Teilraumtopologien.

(ii) Jeder metrische Raum (X, d) zusammen mit der Boreltopologie Ω_d ist hausdorffsch.

(iii) $\mathbb{R}^n$ sowie $\mathbb{C}^n$ zusammen mit der zugehörigen Boreltopologie erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) Abgeschlossene Teilmengen (quasi-)kompakter Räume sind zusammen mit der Teilraumtopologie ebenfalls (quasi-)kompakt.

Definition 1.2.3. Ein Hausdorff-Raum (X, Ω_X) heißt *lokal homöomorph* zu einem topologischen Raum (Y, Ω_Y), falls es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ um x sowie $V \subseteq Y$ offen gibt so, dass ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V$ existiert.

Konstruktion 1.2.4 (Quotiententopologie)**.** Sei (X, Ω_X) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $\pi\colon X \to Y$ surjektiv. Dann ist

$$\Omega_Y := \{V \subseteq Y;\ \pi^{-1}(V) \in \Omega_X\}$$

eine Topologie auf Y, die sog. *Quotiententopologie.*

Konstruktion 1.2.5 (Alexandroff-Kompaktifizierung)**.** Sei (X, Ω_X) ein topologischer Raum, p ein Objekt, das nicht in X liegt, und sei $Y := X \dot\cup \{p\}$. Dann ist

$$\Omega_Y := \Omega_X \dot\cup \big\{\{p\} \dot\cup (X \setminus C);\ C \subseteq X \text{ quasikompakt und abgeschlossen}\big\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte *Alexandroff-Kompaktifizierung* von Ω_X bzgl. p.

Konstruktion 1.2.6 (Kofinite Topologie)**.** Sei X eine unendliche Menge. Dann ist

$$\Omega := \{U \subseteq X;\ \#(X \backslash U) < \infty\} \dot\cup \{\emptyset\}$$

eine Topologie auf X, die sogenannte *kofinite Topologie.*

Erinnerung 1.2.7. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

(i) Sei Y eine Menge und $\pi\colon X \to Y$ surjektiv, so ist die Quotiententopologie bzgl. π auf Y die feinste Topologie so, dass π stetig ist.

(ii) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom wird auf Quotiententopologie und Alexandroff-Kompaktifizierung bzgl. p übertragen.

(iii) Die Alexandroff-Kompaktifizierung von $X \dot\cup \{p\}$ ist quasikompakt.

Überlagerungsabbildungen und Blätterzahl

Definition 1.3.1. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) φ heißt *diskret*, falls alle Fasern diskret sind.

(ii) φ heißt *offen*, wenn für alle $U \subseteq X$ offen $\varphi(U) \subseteq Y$ offen ist.

(iii) φ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen $\varphi(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

(iv) φ heißt *Überlagerung*, falls φ stetig, offen und diskret ist.

(v) φ stetig heißt *eigentlich*, wenn $\varphi^{-1}(C) \subseteq X$ kompakt für alle $C \subseteq Y$ kompakt ist.

Definition 1.3.2. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine Überlagerung.

(i) $x \in X$ heißt *Verzweigungspunkt* von φ, falls für alle offenen Umgebungen $U \subseteq X$ von x die Einschränkung $\varphi \restriction_U$ nicht injektiv ist. Für einen Verzweigungspunkt x nenne $\varphi(x)$ *kritischen Punkt*. Sei $X_\varphi \subseteq X$ die Menge aller Verzweigungs- und $Y_\varphi \subseteq Y$ die Menge aller kritischen Punkte.

(ii) φ heißt *unverzweigt*, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt so, dass $\varphi \restriction_U$ injektiv ist, d. h. wenn $X_\varphi = \emptyset$.

(iii) φ heißt *unbegrenzt*, wenn es für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ sowie eine paarweise disjunkte Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ gibt so, dass

$$\varphi^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{i \in I}} U_i$$

und $\varphi \restriction_{U_i} : U_i \to V$ Homöomorphismen sind.

(iv) Sei Z ein weiterer topologischer Raum und $\gamma\colon Z \to Y$ stetig. Eine stetige Abbildung $\hat{\gamma}\colon Z \to X$ heißt *Liftung* von γ bzgl. φ, falls $\gamma = \varphi \circ \hat{\gamma}$ gilt, d. h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & Z. \arrow[ul, "\hat{\gamma}"] \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

(v) φ besitze die *Kurvenliftungseigenschaft*, wenn es für jeden Weg $\gamma\colon [0,1] \to Y$ und für jedes $x_0 \in X$ mit $\gamma(0) = \varphi(x_0)$ eine Liftung $\hat{\gamma}\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\hat{\gamma}(0) = x_0$.

Bemerkung 1.3.3.

(i) Für X und Y lokalkompakt ist jede eigentliche Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ abgeschlossen.

(ii) Für X kompakt und Y lokalkompakt ist jede stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ abgeschlossen.

(iii) Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ eigentlich.

Proposition 1.3.4. *Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine unbegrenzte Überlagerung, Z zusammenhängend und $\gamma\colon Z \to Y$ stetig. Dann sind zwei Liftungen $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2\colon Z \to X$ identisch, wenn sie in einem Punkt $z_0 \in Z$ übereinstimmen.*

Beweis. (nach [For77, Satz I.4.8, S. 20f.]) Betrachte $M := \{z \in Z;\ \hat{\gamma}_1(z) = \hat{\gamma}_2(z)\}$. Dann ist $M \subseteq Z$ abgeschlossen, denn für die abgeschlossene Diagonale[1] $\Delta_X := \{(x,x);\ x \in X\} \subseteq X \times X$ gilt $M = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)^{-1}(\Delta_X)$.

Da $M \neq \emptyset$, genügt es wegen des Zusammenhangs auf Z, zu zeigen, dass $M \subseteq Z$ offen ist. Sei $z \in M$ sowie $x := \hat{\gamma}_1(z) = \hat{\gamma}_2(z)$. Da φ unbegrenzt ist, gibt es offene Umgebung $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq Y$ um x bzw. y so, dass $\varphi \restriction_U : U \to V$ ein Homöomorphismus ist. Weiter gilt $\varphi(x) = \gamma(z)$. Da $\hat{\gamma}_1$ und $\hat{\gamma}_2$ stetig sind, gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq Z$ von z mit $\hat{\gamma}_i(W) \subseteq U$ für beide $i \in \{1,2\}$. Betrachte $\psi := (\varphi \restriction_U)^{-1} : V \to U$. Da $\varphi \circ \hat{\gamma}_i = \gamma$ gilt, folgt nun

$$\hat{\gamma}_i \restriction_W = (\psi \circ \gamma) \restriction_W,$$

also $\hat{\gamma}_1 \restriction_W = \hat{\gamma}_2 \restriction_W$ und insgesamt ist M offen, sodass die Behauptung folgt. □

Proposition 1.3.5. *Seien X und Y Hausdorff-Räume. Dann gilt:*

(i) *Jede unbegrenzte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ unverzweigt.*

(ii) *Jede unbegrenzte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ besitzt die Kurvenliftungseigenschaft.*

(iii) *Sind X und Y lokalkompakt, so ist jede unverzweigte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ unbegrenzt.*

Beweis. (nach [For77, Satz I.4.14, S. 24]) Aussage „(i)“ ist trivial, denn alle $\varphi \restriction_{U_i}$ sind injektiv.

Zu „(ii)“: Sei $\gamma\colon [0,1] \to Y$ eine Kurve und $x_0 \in X$ mit $\gamma(0) = \varphi(x_0)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_N = 1$ und offene Mengen $V_1, \ldots, V_N \subseteq Y$ mit

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i \ f^{-1}(V_i) = \dot{\bigcup_{j \in J_i}} U_{ij}$$

und $\varphi_{ij} := \varphi \restriction_{U_{ij}} : U_{ij} \to V_i$ sind Homöomorphismen.

Zeige nun die Existenz von Liftungen $\hat{\gamma}_k\colon [0, t_k] \to X$ für $k \in \{0, \ldots, N\}$ per Induktion nach k. Hierbei ist „$k = 0$“ trivial. Zu „$k-1 \to k$“: Es existiere also $\hat{\gamma}_{k-1}\colon [0, t_{k-1}] \to X$ mit $\hat{\gamma}_{k-1}(0) = x_0$. Setze $x_{k-1} := \hat{\gamma}_{k-1}(t_{k-1})$. Dann gilt $\varphi(x_{k-1}) = \gamma(t_{k-1}) \in V_k$ und wir finden ein $j \in J_k$ so, dass $x_{k-1} \in U_{kj}$. Betrachte nun $\psi := \varphi_{jk}^{-1} : V_k \to U_{kj}$ sowie

$$\hat{\gamma}_k\colon [0, t_k] \to X,$$
$$t \mapsto \begin{cases} \hat{\gamma}_{k-1}(t) & \text{für } t \leq t_{k-1}, \\ \psi(\gamma(t)) & \text{für } t > t_{k-1}. \end{cases}$$

Dann ist $\hat{\gamma}_k$ die für den Induktionsschritt gewünschte stetige Fortsetzung.

Für „(iii)“ siehe [For77, Satz I.4.22, S. 27]. □

Konstruktion 1.3.6 (Blätterzahl)**.** Seien X und Y Hausdorff-Räume, Y wegzusammenhängend, $f\colon X \to Y$ eine unbegrenzte Überlagerung sowie $y, y' \in Y$. Dann gilt $\#\varphi^{-1}(y) = \#\varphi^{-1}(y')$. Definiere dann $n := \#\varphi^{-1}(y)$ für $y \in Y$ beliebig als *Blätterzahl* von φ und nenne φ *n-blättrige Überlagerung.*

Beweis. (nach [For77, Satz I.4.25, S. 28]) Seien $y, y' \in Y$. Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to Y$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = y'$. Wähle nun $x \in \varphi^{-1}(y)$. Da φ mit Proposition 1.3.5 (ii) die Kurvenliftungseigenschaft besitzt, gibt es mit Proposition 1.3.4 genau eine Liftung $\hat{\gamma}_x\colon [0,1] \to X$ mit $\hat{\gamma}_x(0) = x$. Betrachte jetzt

$$\Phi\colon \varphi^{-1}(y) \to \varphi^{-1}(y'), x \mapsto \hat{\gamma}_x(1)$$

Dann ist Φ offensichtlich bijektiv, sodass die Behauptung folgt. □

Projektive Kurven

Prävarietäten und der projektive Raum

Vereinbarung 2.1.1. Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ stets algebraisch abgeschlossen.

[1] Dies gilt, da $X \times X$ die Produkttopologie eines Hausdorff-Raumes trägt.

Erinnerung 2.1.2. Ein irreduzibler Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *Prävarietät*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^r$ von affinen Varietäten gibt.

Für zwei Prävarietäten $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ *Morphismus* von Prävarietäten, falls φ ein Morphismus der zugrundeliegenden Räume mit $\mathbb{K}$-Funktionen ist. Bezeichne mit $\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ die Menge der Morphismen.

Erinnerung 2.1.3. Betrachte $W_n := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\}$ sowie die Gruppenoperation

$$\mu\colon \mathbb{K}^* \times W_n \to W_n, (a, x) \mapsto a \cdot x.$$

Dann setze $\mathbb{P}_n := W_n/\mathbb{K}^*$, bezeichne $[z_0, \dots, z_n] := [(z_0, \dots, z_n)]$ und betrachte den kanonischen Projektionsepimorphismus $\pi_n\colon W_n \to \mathbb{P}_n, z \mapsto [z]$.

(i) Betrachte auf W_n die Zariski-Teilraumtopologie des $\mathbb{K}^{n+1}$ und verwende auf $\mathbb{P}_n$ die Quotiententopologie bzgl. π_n. Diese nennen wir *Zariski-Topologie*.

(ii) Sei $U \subseteq \mathbb{P}_n$ offen. Dann ist durch den Pushforward

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} := (\pi_n)_* \mathcal{O}_{W_n}$$

eine Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$ definiert, die sog. *Garbe der regulären Funktionen*. Auf diese Weise wird $\mathbb{P}_n$ zu einem Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

(iii) π_n ist ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen und zusätzlich offen.

Definition 2.1.4 (Nullstellengebilde & Verschwindungsideal)**.**

(i) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen heißt $C(X) := \overline{\pi_n^{-1}(X)} = \pi_n^{-1}(X) \dot\cup \{0\}$ *affiner Kegel*.

(ii) Für $\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ homogen heißt $V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) := \pi_n(V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\mathfrak{a}) \cap W_n)$ *Nullstellengebilde*.

(iii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ heißt $I_{\mathbb{P}_n}(X) := I_{\mathbb{K}^{n+1}}(C(X))$ *Verschwindungsideal*.

Erinnerung 2.1.5 (Hilberts Nullstellensatz)**.** Wir haben inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{matrix} X \subseteq \mathbb{P}_n \\ \text{abg.} \end{matrix}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{matrix} \mathfrak{a} \lneq \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n] \\ \text{hom. Radikalid.} \end{matrix}\right\} \\ X & \mapsto & I_{\mathbb{P}_n}(X) \\ V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Weiter ist $X \subseteq \mathbb{P}_n$ irreduzibel genau dann, wenn $I(X)$ prim ist.

Konstruktion 2.1.6 (Homogenisierung und Dehomogenisierung)**.** Sei $0 \leq i \leq n$.

(i) Für $f \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ homogen ist die *i-te Dehomogenisierung* ist gegeben durch

$$f_{(i)} := f(T_0, \dots, T_{i-1}, 1, T_{i+1}, \dots, T_n).$$

(ii) Für $g \in \mathbb{K}[T_j;\, 0 \leq j \leq nj \neq i]$ ist ist die *i-te Homogenisierung* gegeben durch

$$g^{(i)} := T_i^{\mathrm{tdeg}(g)} \cdot g(T_0 T_i^{-1}, \dots, T_{i-1} T_i^{-1}, T_{i+1} T_i^{-1}, \dots, T_n T_i^{-1}).$$

Definition 2.1.7 (Affine Karten)**.**

(i) Betrachte die offene Überdeckung $\{\mathbb{P}_n^i\}_{i=0}^n$ von $\mathbb{P}_n$, wobei $\mathbb{P}_n^i := \mathbb{P}_n \setminus V(T_i)$. Dann nenne

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i\colon \mathbb{P}_n^i &\to \mathbb{K}^n, \\ [z_0, \dots, z_n] &\mapsto \left(z_0 z_i^{-1}, \dots, z_{i-1} z_i^{-1}, z_{i+1} z_i^{-1}, \dots, z_n z_i^{-1}\right) \end{aligned}$$

i-te affine Überdeckungsabbildung.

(ii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ (lokal) abgeschlossen definiere $X^i := X \cap \mathbb{P}_n^i \subseteq X$ sowie $X_i := \mathfrak{A}_i(X^i) \subseteq \mathbb{K}^n$. Ferner nenne $\mathfrak{A}_i^X := \mathfrak{A}_i \restriction_{X^i}\colon X^i \to X_i$ *i-te (quasi-)affine Karte* von X und die $X_0, \dots, X_n$ *(quasi-)affine Komponenten* von X.

Erinnerung 2.1.8. Die affinen Überdeckungsabbildungen leisten folgendes:

(i) Für $0 \leq i \leq n$ ist $\mathfrak{A}_i$ ein Isomorphismus von affinen Varietäten mit Umkehrabbildung

$$\mathfrak{A}_i^{-1}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) = [z_0, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n].$$

(ii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen ist $X_i \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und $\mathfrak{A}_i^X\colon X^i \to X_i$ ein Isomorphismus affiner Varietäten.

(iii) Für $f \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ homogen sowie $g \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_n]$ gilt

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{P}_n}(f)_i &\cong \mathfrak{A}_i\left(V_{\mathbb{P}_n}(f)_i\right) \\ &= V_{\mathbb{K}^n}(f_{(i)}) \end{aligned}$$

und

$$\overline{\mathfrak{A}_i^{-1}\left(V_{\mathbb{K}^n}(g)\right)} = V_{\mathbb{P}_n}\left(g^{(i)}\right).$$

Definition 2.1.9. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät über $\mathbb{K}$.

(i) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *projektive Varietät*.

(ii) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *quasiprojektive Varietät*.

(iii) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ lokal abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *quasiaffine Varietät*.

Bemerkung 2.1.10. Wir haben folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd} & & \text{affine} \arrow[d] \\ \text{projektiv} \arrow[dr] & & \text{quasiaffine} \arrow[dl] \\ & \text{quasiprojektiv} & \end{tikzcd}$$

Weiter gilt:

(i) Lokal abgeschlossene Teilmengen quasiprojektiver bzw. -affiner Varietäten sind wieder quasiprojektive bzw. -affine Varietäten.

(ii) Abgeschlossene Teilmengen projektiver bzw. affiner Varietäten sind wieder projektive bzw. affine Varietäten.

Erinnerung 2.1.11. Falls X projektiv ist, gilt $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$, insb. ist jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ konstant.

Proposition 2.1.12. *Sei X quasiprojektiv, $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist ein Morphismus.*

(ii) *$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind regulär auf X.*

Beweis. Siehe [Har77, Lem. I.3.6, S. 21] □

Proposition 2.1.13. *Sei X quasiprojektiv und Y affin. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Y],\mathcal{O}_X(X)),\\ \varphi &\mapsto \varphi^*\end{aligned}$$

bijektiv und für $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ist $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq Y$ dicht genau dann, wenn φ^* injektiv ist.

Beweis. Siehe [Har77, Prop. I.3.5, S. 20f.] □

Körper der rationalen Funktionen und rationale Morphismen

Erinnerung 2.2.1. Sei X eine (sc. irreduzible) Prävarietät. Für $\mathbb{K}(X)$ gilt dann:

(i) Falls X affin ist, so hat man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(X)) &\to \mathbb{K}(X),\\ fg^{-1} &\mapsto \left[X_g, fg^{-1}\right].\end{aligned}$$

(ii) Für jedes $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen gilt $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U)$.

(iii) Jedes $[U,f] \in \mathbb{K}(X)$ hat einen eindeutig bestimmten maximalen Repräsentanten (U',f'). Nenne dann $\mathrm{Def}(f) := U'$ *Definitionsbereich* von f.

Bemerkung 2.2.2. Für projektive Varietäten bemerken wir folgendes:

(i) Sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ projektiv und $0 \leq i \leq n$ mit $X^i \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(X_i) \cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X_i])$.

(ii) Für die affinen Komponenten gilt $\mathbb{P}_n^i \cong \mathbb{K}^n$ mit $0 \leq i \leq n$, also auch $\mathbb{K}(\mathbb{P}_n) \cong \mathbb{K}(T_1,\ldots,T_n)$.

Konstruktion 2.2.3 (Rationale Morphismen)**.** Seien X und Y Prävarietäten. Dann betrachte

$$\mathfrak{R}(X,Y) := \left\{\begin{matrix}(U,\varphi);\ \emptyset \neq U \subseteq X \text{ off.},\\ \varphi\colon U \to Y \text{ Morph.}\end{matrix}\right\}.$$

sowie die Äquivalenzrelation $(U,\varphi) \sim (V,\psi) :\iff \varphi\restriction_{U\cap V} = \psi\restriction_{U\cap V}$. Nenne $[U,\varphi] := [(U,\varphi)]$ *rationalen Morphismus* und notiere $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$. Setze weiter $\mathrm{Rat}_{\mathbb{K}}(X,Y) := \mathfrak{R}(X,Y)/\sim$.

Erinnerung 2.2.4. Seien X und Y Prävarietäten.

(i) Jedes $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ hat einen eind. bestimmten maximalen Repräsentanten (U',φ'). Nenne dann $\mathrm{Def}(\varphi) := U'$ *Definitionsbereich* von φ.

(ii) $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ heißt *dominant*, falls $\varphi(U) \subseteq Y$ dicht liegt.

(iii) $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ heißt *birational*, falls $\emptyset \neq U \subseteq X$ und $\emptyset \neq V \subseteq Y$ existieren so, dass $\varphi\restriction_U\colon U \to V$ ein Isomorphismus ist. In diesem Falle nenne X und Y *birational äquivalent.*

(iv) Falls $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ birational ist, so gibt es $\psi\colon Y \dashrightarrow X$ so, dass $\psi\circ\varphi \sim \mathrm{id}_X$ und $\varphi\circ\psi \sim \mathrm{id}_Y$.

Bemerkung 2.2.5. Die quasiprojektiven Varietäten bilden zusammen mit den dominanten rationalen Morphismen eine Kategorie, in der der Isomorphiebegriff mit dem der birationalen Äquivalenz zusammenfällt.

Bemerkung 2.2.6. Seien X und Y quasiprojektiv.

(i) Sei $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ dominant. Dann finden wir $V \subseteq Y$ affin und $U \subseteq \varphi^{-1}(V)$ offen so, dass $\varphi\colon U \to V$ ein dominanter Morphismus ist. Dann ist der Komorphismus $\varphi^*\colon \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[U]$ nach Proposition 2.1.13 injektiv und fortsetzbar zu einem $\mathbb{K}$-Algebrenhomorphismus $\varphi^\sharp\colon \mathbb{K}(Y) \cong \mathbb{K}(V) \cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) \to \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[U]) \cong \mathbb{K}(U) \cong \mathbb{K}(X)$. Diese Fortsetzung ist unabhängig von der Wahl von V und U.

(ii) Sei $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ rational. Für $Y \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ bzw. $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen können wir schreiben $\varphi = (\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ bzw. $\varphi = [\varphi_0,\ldots,\varphi_n]$ mit $\varphi_i \in \mathbb{K}(X)$. Dann gilt

$$\mathrm{Def}(\varphi) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Def}(\varphi_i)$$

und weiter gilt $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(\mathrm{Def}(\varphi))$.

Satz 2.2.7 (Erster Äquivalenzsatz)**.** *Zwischen den Kategorien*

(i) *Quasiprojektive Varietäten mit dominanten rationalen Morphismen.*

(ii) *Endlich erzeugte Körpererweiterungen über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}$-Homomorphismen.*

haben wir einen wesentlich surjektiven volltreuen kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned}\left[\begin{matrix}\textit{Quasiproj.}\\ \textit{Varietäten}\end{matrix}\right] &\longrightarrow \left[\begin{matrix}\textit{Endl. erz.}\\ \mathbb{K}\textit{-Erw.}\end{matrix}\right]\\ X &\mapsto \mathbb{K}(X)\\ \varphi &\mapsto \varphi^\sharp.\end{aligned}$$

Beweis. (nach [Har77, Thm. I.4.4, S. 25]) Dass $\mathcal{F}$ ein kontravarianter Funktor ist, ist klar. Es bleibt die wesentliche Surjektivität sowie die Volltreue zu zeigen.

Zunächst zur Volltreue: Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\colon \mathrm{Rat}_{\mathbb{K}}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y),\mathbb{K}(X)),\\ \varphi &\mapsto \varphi^\sharp\end{aligned}$$

die Morphismenabbildung. Sei nun $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y),\mathbb{K}(X))$. Mit Bemerkung 2.2.6 (i) können wir Œ annehmen, dass Y affin ist. Seien nun $\mathbb{K}[Y] \ni f_1,\ldots,f_r\colon Y \to \mathbb{K}$ die Erzeuger von $\mathbb{K}[Y]$. Dann gilt $\psi(f_1),\ldots,\psi(f_r) \in \mathbb{K}(X)$, d. h. es gibt $U \subseteq X$ offen so, dass $\psi(f_1),\ldots,\psi(f_r) \in \mathcal{O}_X(U)$ gilt. Wir erhalten auf diese Weise einen Homomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Y],\mathcal{O}_U(U)) \ni \Phi_\psi\colon \mathbb{K}[Y] \cong \mathbb{K}[f_1,\ldots,f_r] \to \mathcal{O}_U(U), f_i \to \psi(f_i)$ von $\mathbb{K}$-Algebren. Wegen Proposition 2.1.13 entspricht dies einem Morphismus $\psi^\natural\colon U \to Y$ von Varietäten. Da U dicht in X liegt, ist $\psi^\natural\colon X \dashrightarrow Y$ rational. Da ψ als Körperhomomorphismus injektiv ist, ist auch $\psi^\natural$ injektiv und $\psi^\natural$ folglich dominant. Es lässt sich nun leicht nachrechnen, dass $(\psi^\natural)^\sharp = \psi$ gilt und $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ surjektiv ist. Weiter ist klar, dass $(\varphi^\sharp)^\natural = \varphi$ für alle $\mathrm{Rat}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ gilt, sodass insgesamt die Volltreue folgt.

Nun zur wesentlichen Surjektivität: Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung, also $\mathbb{L} = \mathbb{K}(y_1,\ldots,y_n)$ mit $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{L}$. Sei nun $A := \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n]$, also $\mathbb{K} \subseteq A \subseteq \mathbb{L}$. Betrachte nun den Epimor-

phismus

$$\Phi\colon \mathbb{K}[T_1,\dots,T_n] \to A, T_i \mapsto y_i$$

Dann gilt mit dem Homomorphiesatz $A \cong \mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]/\mathrm{Kern}(\Phi)$. Da $A \subseteq \mathbb{L}$ nullteilerfrei ist, folgt $\mathfrak{a} := \mathrm{Kern}(\Phi) \leq \mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]$ prim, d. h. $Y := V_{\mathbb{K}^n}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ ist irreduzibel und damit eine affine Varietät und es gilt $A = \mathbb{K}[Y]$, sodass sich abschließend ergibt

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(Y) &\cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[Y])\\ &\cong \mathrm{Quot}(A)\\ &\cong \mathbb{K}(y_1,\dots,y_n)\\ &\cong \mathbb{L}.\end{aligned}$$

□

Nichtsinguläre Kurven

Definition 2.3.1. Eine Prävarietät X mit $\dim(X) = 1$ heißt *Kurve*.

Erinnerung 2.3.2. Für eine Prävarietät X betrachte die Zariski-Krulldimension.

(i) Es gilt $\dim(X) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X))$.

(ii) Für $U \subseteq X$ offen gilt $\dim(U) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(U)) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) = \dim(X)$.

(iii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen und $0 \leq i \leq n$ mit $X^i \neq \emptyset$ gilt $\dim(X) = \dim(X_i)$.

Proposition 2.3.3. *Sei X eine Prävarietät und sei $x \in X$.*

(i) *$\mathcal{O}_{X,x}$ ist lokal mit $\mathfrak{m}_{X,x} := \{f_x \in \mathcal{O}_{X,x};\, f(x) = 0\}$ und es gilt $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$.*

(ii) *Es gilt $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong \mathbb{K}(X)$.*

(iii) *Es gilt $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(X)$.*

Beweis. Zu „(i)“: Betrachte hierzu $\Phi\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}, f_x \mapsto f(x)$. Dann ist Φ wohldefiniert und surjektiv und es gilt $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathfrak{m}_{X,x}$, weswegen bereits mit dem Homomorphiesatz $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$ und $\mathfrak{m}_{X,x}$ maximal folgt. Dass $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathfrak{m}_{X,x}$ alle Nichteinheiten enthält.

Zu „(ii)“: Wir identifizieren $\mathcal{O}_{X,x} = \{f \in \mathbb{K}(X);\, x \in \mathrm{Def}(f)\} \subseteq \mathbb{K}(X)$, weswegen $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) \subseteq \mathbb{K}(X)$ folgt. Für „$\supseteq$“ ziehen wir uns auf eine Überdeckungskomponente um x zurück, sodass wir annehmen können, dass X affin ist. Dann haben wir eine Inklusionskette

$$\mathbb{K}[X] = \mathcal{O}_X(X) \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \subseteq \mathbb{K}(X),$$

sodass die Behauptung bereits mit $\mathbb{K}(X) \cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$ folgt.

Aussage „(iii)“ wird in [Har77, Thm. I.3.2, S. 17] für X affin gezeigt. Für den allgemeinen Fall betrachte $U \subseteq X$ affin mit $x \in U$ und bemerke $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{U,x}) = \dim(U) = \dim(X)$. □

Definition 2.3.4.

(i) Ein noetherscher lokaler Integritätsring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ heißt *regulär*, falls $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R)$ mit $k := R/\mathfrak{m}$.

(ii) Eine Prävarietät X heißt *regulär* oder *nichtsingulär* in $x \in X$, falls $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Dann nenne $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ *Tangentialraum* von X an x. Eine Prävarietät X heißt *regulär* oder *nichtsingulär*, falls X nichtsingulär in allen $x \in X$ ist.

(iii) Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]$ heißt *regulär* oder *nichtsingulär* in $x \in \mathbb{K}^n$, falls es ein $1 \leq i \leq n$ gibt so, dass $\partial_i f(x) \neq 0$ gilt.

Erinnerung 2.3.5. Sei $X := V_{\mathbb{P}_n}(f)$ mit $f \in \mathbb{K}[T_0,\dots,T_n]$ homogen sowie $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$. Sei weiter $x \in X$ und $0 \leq i \leq n$ mit $x \in \mathbb{P}_n^i$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist regulär in x.
(ii) f ist regulär in x.
(iii) X_i ist regulär in $\mathfrak{A}_i(x)$.
(iv) $f_{(i)}$ ist regulär in $\mathfrak{A}_i(x)$.

Definition 2.3.6. Sei R ein Integritätsring. Eine surjektive Abbildung $\nu\colon \mathrm{Quot}(R)^* \to \mathbb{Z}$ heißt *diskrete Bewertung*, falls gilt:

(i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in \mathrm{Quot}(R)^*$.

(ii) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ für alle $x, y \in \mathrm{Quot}(R)^*$ mit $y \neq -x$.

Falls für R eine diskrete Bewertung existiert und ferner

$$R = \{x \in \mathrm{Quot}(R)^*;\, \nu(x) \geq 0\} \dot\cup \{0\}$$

gilt, so heißt R *diskreter Bewertungsring*.

Proposition 2.3.7. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ und es gelte $\dim(R) = 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*

(ii) *R ist normal.*

(iii) *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*

(iv) *R ist regulär.*

(v) *Es gibt ein $t \in R$ so, dass es für alle $\{0_R\} \neq \mathfrak{a} \leq R$ ein $n(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $\mathfrak{a} = \langle t^{n(\mathfrak{a})} \rangle$.*

In diesem Falle gilt $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ sowie $\mathfrak{m}^k = \langle t^k \rangle \supsetneq \langle t^{k+1} \rangle = \mathfrak{m}^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Siehe [Ati69, Prop. 9.2, S. 94] □

Konstruktion 2.3.8 (Bewertung bezüglich Uniformierendem)**.** Sei R ein regulärer noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$. Dann gibt es für jedes $a \in R$ genau ein $n(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\langle a \rangle = \langle t^{n(a)} \rangle$. Dann ist

$$\nu_t\colon \mathrm{Quot}(R)^* \to \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \mapsto n(a) - n(b)$$

eine diskrete Bewertung, genannt Bewertung *bezüglich t*. Nenne weiter das (bis auf Assoziiertheit eindeutige) $t \in R$ *Uniformisierendes*.

Folgerung 2.3.9. *Sei X eine Kurve, die regulär in $x \in X$ ist. Dann gilt:*

(i) *$\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 1, also $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 \cong \mathbb{K}$*

(ii) *$\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{m}_{X,x}$ ist ein Hauptideal.*

(iii) *Wir haben eine diskrete Bewertung $\mathrm{ord}_x := \nu_t$ auf $\mathbb{K}(X)$.*

Beweis. Zu „(i)“: Wir wissen, dass $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ ein Vektorraum über $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$ ist und weiter, dass wegen der Regularität von $\mathcal{O}_{X,x}$ gilt

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2) &= \dim(\mathcal{O}_{X,x})\\ &= \dim(X)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Die Aussagen „(ii)“ folgen unmittelbar aus der Äquivalenz von Proposition 2.3.7. □

Satz 2.3.10 (Zweiter Äquivalenzsatz)**.** *Folgende Kategorien sind äquivalent:*

(i) *Nichtsinguläre projektive Kurven mit dominanten Morphismen.*

(ii) *Quasiprojektive Kurven mit dominanten rationalen Abbildungen.*

(iii) *1-Erweiterungen über* $\mathbb{K}$ *mit* $\mathbb{K}$*-Homomorphismen.*

Beweis. Siehe [Har77, Cor. I.6.12, S. 45f.] □

Bemerkung 2.3.11. Zusätzlich zu der Tatsache, dass uns dieser Äquivalenzsatz eine der entscheidenden Äquivalenzen liefert, ist er ziemlich erstaunlich: Für nichtsinguläre projektive Kurven ist es das Gleiche, ob sie birational äquivalent oder isomorph sind.

[Ati69] **Atiyah, Michael Francis** und **Macdonald, Ian Grant**. *Introduction to Commutative Algebra*. Addiso-Wesley 1969

[For77] **Forster, Otto**. *Riemannsche Flächen*. Springer 1977

[Har77] **Hartshorne, Robin**. *Algebraic Geometry*, Bd. 5. New York. Springer 1977

[Har07] **Hartl, Urs**. *Kategorien und Funktoren*. 2007, math.uni-muenster.de/u/urs.hartl/07so_AlgGeom/Kategori.pdf (abgerufen am 19. 03. 2015, 19:35)

Feuilleton

Das gibt's doch gar nicht!

Ein Essay aus der Kategorie „Dinge, die ich eh nicht ändern kann, über die ich mir aber trotzdem unsinnig viele Gedanken mache“

VON JANA WILLEMSEN (Gastbeitrag)

Philosophie war in der Schule mein absolutes Lieblingsfach, doch jetzt, als angehende Philosophiestudentin drängt sich vor allem ein Gedanke in den Vordergrund: Was, wenn ich so werde wie Descartes und am Ende an gar nichts mehr glaube? Was, wenn ich der ultimative Einsamkeit, dem Superlativ des Alleinseins, dem Solipsismus verfalle?

Im elften von zwölf Schuljahren hat mein Philosophielehrer ein Experiment mit uns durchgeführt, dass, wie ich finde, nicht besser sein könnte, um die Bedeutung der erkenntnistheoretischen Strömung des absoluten Alleinseins, des Solipsismus, klarzumachen.

Foto: gfpeck – flickr.com (CC BY-ND 2.0)

Er bat uns, ruhig auf unserem Stuhl zu sitzen, unsere Ellbogen auf den Tisch zu stützen und dann mit beiden Händen gleichzeitig Augen und Ohren fest zuzudrücken. Wir sollten so lange ausharren, bis wir das Gefühl verspürten, nichts wahrzunehmen und vollkommen allein zu sein.

Ich bin einer von den Menschen, die bei solchen Übungen grundsätzlich schummeln. Nicht, weil ich es irgendwie lustig finde oder mich schäme, so etwas mitzumachen, sondern weil es mich irgendwie interessiert, wie lange meine Mitschüler der Situation standhalten.

Dieses Experiment habe ich damals allerdings nicht ganz durchgehalten, weil ich die Idee schon kannte: Dass sich der Begriff „Solipsismus“ aus den beiden lateinischen Wörtern *solus* (allein) und *ipse* (selbst) zusammensetzt, kann zwar jeder, der ein paar Jahre Latein hatte, problemlos herausfinden, die tatsächliche Bedeutung des Wortes lässt sich dagegen ganz gut mit dem Versuch meines Lateinlehrers erklären:

Wenn du alle Sinne minimierst, die Augen schließt, die Ohren zuhälst, dich so wenig bewegst, wie möglich, und einen kurzen Moment den Atem anhälst, bist du ganz für dich alleine. Alles, was in diesem Moment mit Sicherheit existiert, bist du, beziehungsweise dein Bewusstsein.

Man könnte nun argumentieren, dass die Umwelt existieren muss, egal, ob ich sie gerade wahrnehme oder nicht, schließlich ist sie wieder da, und das größtenteils unverändert, wenn ich meine Wahrnehmung wieder „anschalte“. Nur, weil ich etwas nicht sehe, fühle, rieche oder höre, heißt das nicht, dass es deswegen nicht existiert.

Wenn ich kurz blinzele, sehe ich den Stuhl unter mir nicht. Trotzdem sagt mein Tastsinn mir, dass er noch immer genau da ist, wo ich ihn das letzte Mal gesehen habe. Ich nehme also an, dass etwas existiert, auch, wenn ich es nicht komplett wahrnehme.

Eigentlich schon fast unlogisch, wenn man Abb. 3.1. betrachtet. Der Graph zeigt, zu welchem Zeitpunkt die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes wie hoch ist. Die tiefen, regelmäßigen Einschläge stellen die Wimpernschläge der Beispielperson dar. Von 100 % der möglichen Wahrnehmung durch die Augen (Wenn man volle Öffnung als 100 % definieren kann. Natürlich spielen auch Lichtverhältnisse und Müdigkeit eine Rolle dabei, wie viel ich tatsächlich visuell wahrnehme, diese Faktoren lasse ich in diesem Beispiel allerdings außen vor.) sind bei der Öffnung beider Augen 100 %, beim Schließen eines Augen 50 % und bei kurzen Blinzeln, also dem Schließen beider Augen, 0 % gegeben. Im Beispiel hält der Tastsinn den gesamten Zeitraum über an und liegt dabei bei 100 %. Die Berührung des Stuhls, auf dem ich sitze, lässt zu keinem Zeitpunkt, innerhalb des Zeitraums in dem ich sitze, nach.

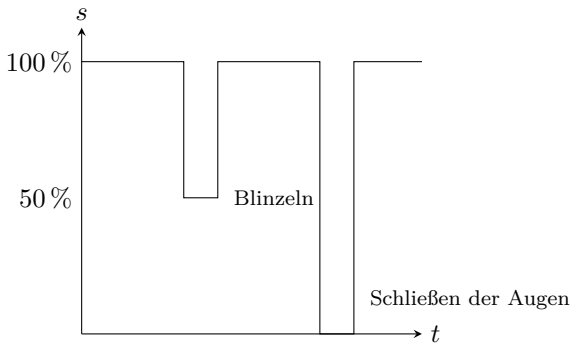


Abb. 3.1: Die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes bei Blinzeln und Schließen der Augen

Der Tastsinn schlägt somit eine Brücke; denn wenn die Existenz eines Gegenstandes mit einem Sinn zu 100 % gesichert ist, muss er schließlich sicher existieren. Das Problem ist, dass man in diesem Bereich, in dem ich den Stuhl nur spüre, jedoch nicht sehe, nicht annehmen darf, dass der Stuhl auch noch genauso aussieht wie früher. Er existiert, das kann ich spüren, zumindest an den Stellen, an denen ich ihn berühre: An der Lehne, der Sitzfläche und den Armstützen. Aber existieren die Beine? Ist der Stuhl nach wie vor rot? Und ist der Boden, den meine Füße spüren, meine Augen jedoch nicht sehen, noch immer aus Parkett? Das kann ich in diesem kurzen Moment nicht sicher sagen.

Die Graphen in Abb. 3.1. zeigen also nicht die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes, sondern mehr die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes in der Form, in der wir ihn erwarten würden zu sein.

Der letzte Graph stellt den Mittelwert aus den beiden anderen dar. In den Momenten in denen die Augen geschlossen sind, also die Wahrnehmung durch die Augen auf 0 % sinkt, der Tastsinn allerdings noch auf 100 % bleibt, gleichen sich beide Werte auf 50 % aus. Ich kann mir also nur zu 50 % sicher sein, dass der Stuhl so existiert, wie ich es erwarten würde.

Nun sind Sehsinn und Tastsinn nur zwei von fünf Sinnen, mit denen ich wahrnehmen kann. Doch mit welchen Sinnen nehme ich den Stuhl sonst noch wahr?

Ich sehe den Stuhl durchweg, außer ich blinzele oder wende den Blick ab, was in diesem Beispiel nicht der Fall ist. Ich spüre den Stuhl die ganze Zeit, in der ich auf ihm sitze an allen Stellen, an denen ich ihn berühre. Schmecken tue ich den Stuhl nicht, hören auch nicht, schließlich sitze ich ganz ruhig da. Ich rieche den Stuhl nur zu einem kleinen Teil, vielleicht zu 5 %. Für den Mittelwert addiere ich also 100 % (Sehsinn), 100 % (Tastsinn), 0 % (Schmecken), 5 % (Riechen) und 0 % (Hören) und teile diesen Wert durch 5 (Fünf Sinne). Die Zahl die ich erhalte, die 41, zeigt nun, zu wie viel Prozent ich mir sicher sein kann, dass der Stuhl in der Form, die ich von ihm erwarte, existiert.

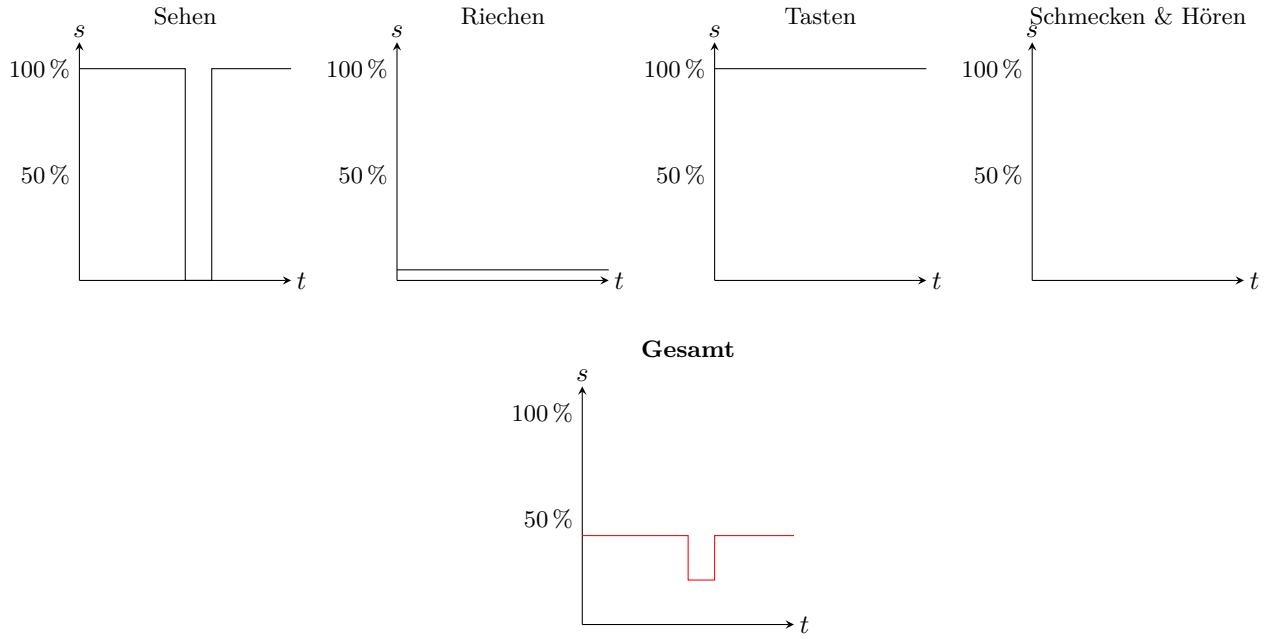


Abb. 3.2: Die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes beim Schließen der Augen im Mittel aller Sinne

Nun kann ich natürlich auch jegliche Hemmungen verlieren und beschließen, die ganze Wahrheit erfahren zu wollen. Ich neige mich also der Lehne entgegen, dabei höre ich den Stuhl immer lauter knarzen (der Graph für „Hören“ steigt also von 0 % langsam auf ganze 100 % der möglichen Lautstärke), und rieche ihn auch immer intensiver (mit der gleichmäßigen Bewegung steigt die Stärke des Geruchs von den 5 % auf volle 100 %) und nehme schließlich wahr, wie der Stuhl schmeckt (hier kommt es zu einem plötzlichen Ausschlag auf 100 %). Sehen und fühlen werde ich denn Stuhl durchweg.In dem Moment, in dem alle Werte 100 % anzeigen, und somit auch der Mittelwert 100 % entspricht, ist die Sicherheit der Existenz des Stuhls in der Form, die ich erwarte, gewährleistet.

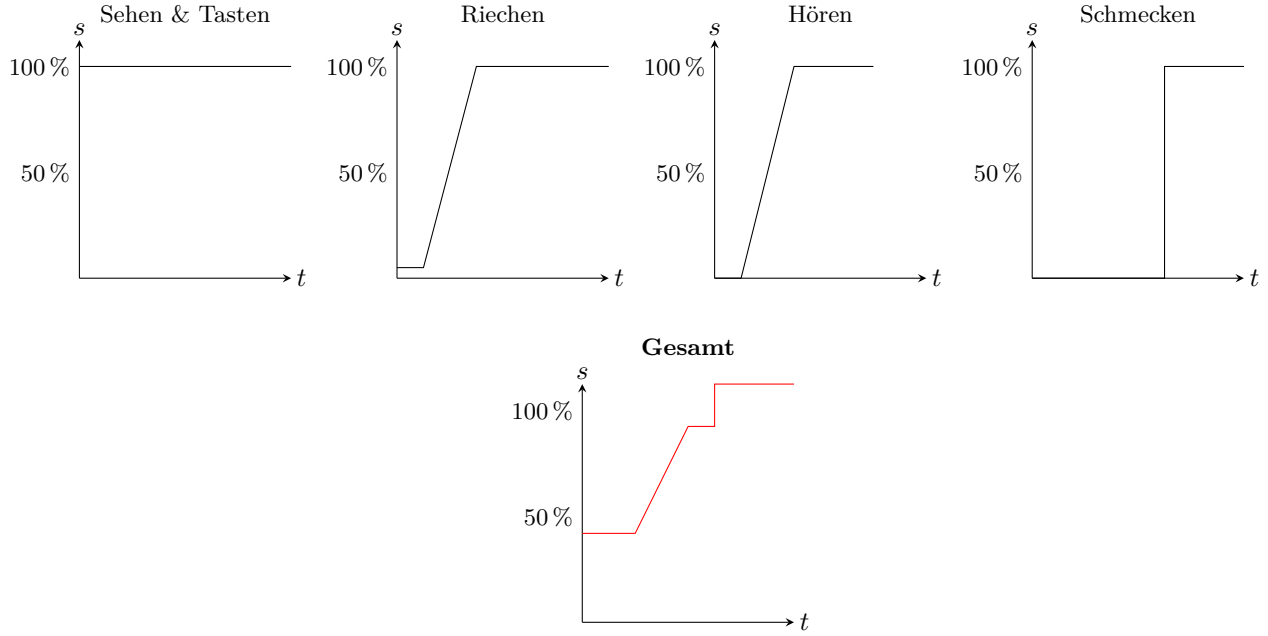


Abb. 3.3: Die Sicherheit der Existenz eines Gegenstandes Mittel aller Sinne bei intensiverer Wahrnehmung

Nun könnte man natürlich noch argumentieren, dass man in keinem Moment, in dem man auf dem Stuhl sitzt, und in tatsächlich auch keinem anderen Moment, den Stuhl komplett sehen kann. Die Unterseite ist mir zum Beispiel den größten Teil der Zeit verborgen. Und wenn ich darunter schaue? Nun ja, dann sehe ich die Oberseite nicht mehr. Es wäre theoretisch möglich, dass die Unterseite des Stuhls bemalt ist, etwas darunter klebt oder der Anfang eines Wurmlochs liegt. All das ist möglich, im Grunde aber total unwahrscheinlich.

Und genau darum geht es. Nur, weil etwas unwahrscheinlich ist, ist es nicht unmöglich. Die Unterseite des Stuhls könnte einfach nicht existieren, wenn wir nicht hinsehen. Wenn wir diesen Gedanken zulassen, dass die Möglichkeit besteht, dass etwas nicht existiert, wenn wir nicht hinsehen, sind wir dem Solipsismus schon ein Stückchen näher gekommen.

Was, wenn alles, was wir nicht wahrnehmen können, nicht existiert? Wenn wir die Haustüre verlassen und der Innenraum verdeckt und folglich verschwunden ist? Wenn hinter unserem Rücken gähnende Leere herrscht?

Wenn man so weiterdenkt, wird es einem schnell unheimlich. Man dreht sich automatisch um und sieht mit einem lauten Seufzen, dass alles noch genau so ist, wie vor ein paar Minuten. Wenn man sich jedoch auf den Gedanken einlässt-was passiert, wenn wir das Experiment meines Philosophielehrers machen? Was passiert, wenn alle Personen im Raum nichts mehr von der Umwelt wahrnehmen? Gibt es den Raum dann noch?

Na ja, könnte man nun argumentieren, man spürt ja noch immer den Stuhl, man atmet noch immer die stickige Luft. Komplett kann man sich gar nicht mit seinen Sinnen von der Außenwelt abgrenzen. Das stimmt natürlich irgendwo. Irgendetwas nimmt man immer wahr- und die zentrale Frage der Erkenntnistheorie ist: Hat das von mir Wahrgenommene etwas mit der Realität gemeinsam? Natürlich kann ich diesen Baum vor dem Fenster als Bild im Kopf sehen. Der Sehnerv leitet die Informationen zum Gehirn und wandelt sie in das Bild um, und ich erkenne den Baum und seine Umgebung. Aber was genau passiert während dieser Umwandlung?

Manche sagen, dass es von Interessen, Kultur und Erfahrungen abhängt, was man erkennt. Wenn meine Eltern Biologen wären, würde ich vielleicht wissen, was das für ein Baum ist, aber mit meinem Allgemeinwissen sage ich nur: Laubbaum. Und: Kein Ginko, denn die sehen anders aus.

Meine Frage lässt sich aber nicht damit beantworten, wie die eigenen Interessen oder Erfahrungen sind. Ich möchte wissen, ob die Welt, wie ich sie in meinen Kopf projiziert bekomme, tatsächlich da ist.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wenn man davon ausgeht, dass der Baum existiert und das Bild in unserem Kopf auch. Erstens: Der Baum existiert in der Form, in der wir ihn wahrnehmen. Es gibt

keinen Unterschied. Zweitens: Der Baum existiert in der Form, in der wir ihn wahrnehmen, allerdings mit einem Unterschied. Zum Beispiel sind die Blätter eigentlich rot und nicht grün, das bemerkt unser Gehirn aber nicht. Drittens: Der Baum existiert in Teilen in der Form, in der wir ihn wahrnehmen. In anderen Teilen weicht unser Bild im Kopf von der Wirklichkeit ab. Viertens: Der Baum existiert in anderer Form, als wir ihn wahrnehmen, ist aber dennoch der Grund für unsere Sinneseindrücke.

Das erste Problem ist, dass wir keine dieser Thesen nachprüfen können. Das Bild in meinem Kopf sehe eben nur ich – und wenn die Wahrnehmung eines Menschen falsch ist, ist es sehr wahrscheinlich, dass es die eines anderen auch ist. Das zweite Problem ist, dass es immer noch eine weitere Möglichkeit geben kann: Das Bild in unserem Kopf ist da, der Baum aber nicht. Was hat dann das Bild in unserem Kopf veranlasst? Wenn es keine äußere Kraft gibt, die dies tut, können wir nur uns selbst dafür verantwortlich machen, was wir sehen.

Wenn man diesen Gedanken verallgemeinert, kommt man schlussendlich zum Solipsismus. Ich glaube zwar, alles wahrzunehmen, nichts davon existiert aber in Wirklichkeit. Natürlich kann man das nicht beweisen, aber irgendwie ist der Gedanke auch faszinierend genug, um weitergesponnen zu werden. Wie kann nichts existieren außer mir? Steuert mein Unterbewusstsein dann, was ich wahrnehme? Wieso ist meine Welt dann nicht perfekt? Und: Was ist mit anderen Menschen? Leiden sie unter dem gleichen Problem, dass sie nicht wissen, was wirklich existiert, oder, was viel schlimmer wäre, gehören meine Mitmenschen nicht auch zur Umwelt und damit zu den Dingen, die ich gar nicht sicher wahrnehme?

Mir wird immer gesagt: Was macht das für einen Unterschied? Dein Leben ist dein Leben, ist es nicht egal, ob etwas um dich herum existiert, solange du nur glücklich bist? Ich muss ganz ehrlich sagen: Ja. Es ist vollkommen egal. Aber befriedigend ist der Gedanke trotzdem nicht.

Dich interessiert, was andere denken? Klar, über die Wahrheit kann man nicht abstimmen, ich würde mich aber trotzdem über deine Meinung zum „Baum-Problem“ in dieser Abstimmung freuen.

Der Mensch, seine Wahrnehmung und die Welt

Ein paar weitere Gedanken zu Janas Ausführungen in *Das gibt's doch gar nicht!*

VON FLORIAN KRANHOLD

Herrje, da hat Jana aber ein großes erkenntnistheoretisches Fass aufgemacht: „Wie sicher kann ich mir sein, dass das, was ich wahrnehme, auch nur im entferntesten etwas mit dem zu tun hat, was ist?“ An dieser Frage scheiden sich seit Jahrhunderten die Geister.

Jana hat, wenn ich sie richtig verstanden habe, einen ähnlichen Standpunkt wie Descartes und auch ich: Das einzige, wessen ich mir völlig gewiss sein kann, ist die Feststellung, dass ich denke und wahrnehme. Ich bringe da in meinem Kopf irgendwelche Kanäle zusammen, die mir scheinbar kohärente Signale davon, wie es da draußen gestaltet sein soll, liefern; und manchmal schenke ich nur einigen Aufmerksamkeit und soll trotzdem glauben, dass das, was mir die übrigen sagen, die „Welt“ ist. Interessanterweise funktionieren die modernen Naturwissenschaften genau andersherum, wenn sie versuchen, zu erklären, welche materiellen Grundlagen unser Denken hat. Ich stelle mir Neurobiologie immer ein wenig so vor wie die beiden Hände, die sich gegenseitig zeichnen.

Sicher kann ich mir bei allem, was ich über die Welt aussage, niemals sein. Aussagen über die Welt sind empirische und infolgedessen bedingt durch die Art und Weise, wie wir die Welt erkennen. Immanuel Kant hat versucht, durch die Analyse eben dieses Erkenntnisapparates Rückschlüsse auf die Welt an sich zu ziehen, hat aber auch die Grenzen einer solchen *transzendentalen Deduktion* aufgezeigt. Grundsätzlich kann man zwar gewisse Anschauungsprinzipien und begriffliche Schemata beschreiben und durch diese formulieren, auf welche Weise unser Kopf funktioniert, aber die Grundlage der empirischen Erkenntnis ist und bleibt ein Sinneseindruck. Und der kann auch ein ziemlich gut geschnittener Film oder eine Matrix oder sonst irgendetwas sein. Das wird man auch niemals genau wissen.

Problematisch wird das Ganze, wenn man sich nun auch noch die Frage stellt, was denn Wahrheit ist. Wenn wir nicht mit Sicherheit sagen können, ob etwas existiert, so können wir auch nicht mit Sicherheit sagen, ob unsere Urteile eine bestehende Relation zwischen Gegenständen, deren Existenz ja zweifelhaft ist, darstellen oder nicht. Was wir jedoch mit Gewissheit beurteilen können, ist, ob unser Bild der Welt, was auch immer das ist, widerspruchsfrei ist. Die Frage, ob ein Urteil über die Welt wahr oder falsch ist, kann wenigstens behilfsmäßig beantwortet werden mit der Antwort auf die Frage, ob das Urteil vereinbar mit dem Rest dessen, was ich von der Welt zu wissen glaube, ist oder nicht.

Und wenn wir uns diesen Wahrheitsbegriff zueigen machen, macht es wirklich keinen Unterschied mehr, ob die Welt existiert oder nicht, denn wir werden immer Wahrnehmungen und Erkenntnisse abgleichen und uns daraus ein Bild basteln, was wir Welt nennen. Das ist doch wenigstens ein wenig tröstlich, oder?

Kreativ

Sommer lang

VON CHARLOTTE MERTZ

Und everyday's like a new beginning.
Der Sommer ist noch lang.
Der Sommer ist noch lang.
Der Sommer ist noch lang.
Everyday's like a new beginning.
— Bosse

Foto: Charlotte Mertz

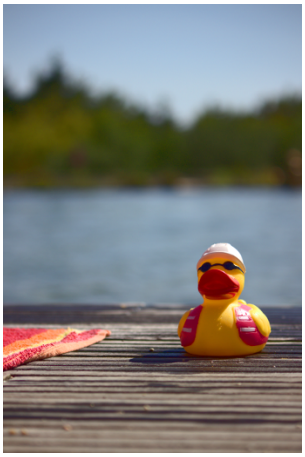
Ein Refrain, wie für mich geschrieben. Vom neuseeländischen Sommer kam ich zurück in die Heimat um dort einen weiteren Sommer zu erleben. Was verbinden wir mit Sommer? Wärme, Zufriedenheit, Sonne, Freude, Freundschaft, Spaß, Unbeschwertheit, Urlaub, Gelassenheit, Zeitlosigkeit, Lagerfeuer.

Man hat die Erwartung an sich und andere, möglichst viel aus dieser Zeit zu machen, möglichst jeden kostbaren Moment, jeden Tag auszunutzen. Jeder Tag ist wie ein Neubeginn, es stehen alle Türen, alle Möglichkeiten offen, man ist von nichts als seiner Vorstellungskraft beschränkt.

Wir alle wollen einen inneren Sommer behalten, all die positiven Aspekte in uns halten, mit uns tragen, weiter erleben. Der Sommer ist noch lang. Aber auch der Sommer wird dem Ende entgegengehen. Es nähern sich unaufhaltsam Herbst und Winter, von vielen unliebsam beäugt, von mir mit offenen Armen begrüßt. Denn mit dem Herbst nähern sich satte Farben, Melancholie, Dunkelheit, Kerzenlicht, die Zeit des Rückblicks, der Gemütlichkeit, der Erholsamkeit, der Kaminfeuer und Geborgenheit.

Glücklicherweise haben wir eine Zeit des Verschnaufens, einen Moment in dem wir zurück und nach vorne blicken und versuchen können, das, was wir haben, schätzen zu lernen.

Das Schöne daran ist: Egal, wie lang Herbst, Winter und Frühling auch sein mögen, egal, ob man diese Zeit so schätzt wie ich oder sich unentwegt nach Sommer sehnt, so werden auch diese Zeiten vorübergehen. Denn jede Phase ist so lang, wie ich sie empfinde. Es kommt alles auf die Betrachtungsweise und die innere Einstellung an.



Fotos: Charlotte Mertz