NEOLOGISMUS

Ausgabe 03/2015

Foto: Martin Gommel

Einmal Pegida bitte! – S. 5

Foto: OldOnliner – flickr.com (CC BY-NC-ND 2.0)

Das Baumhaus – S. 30

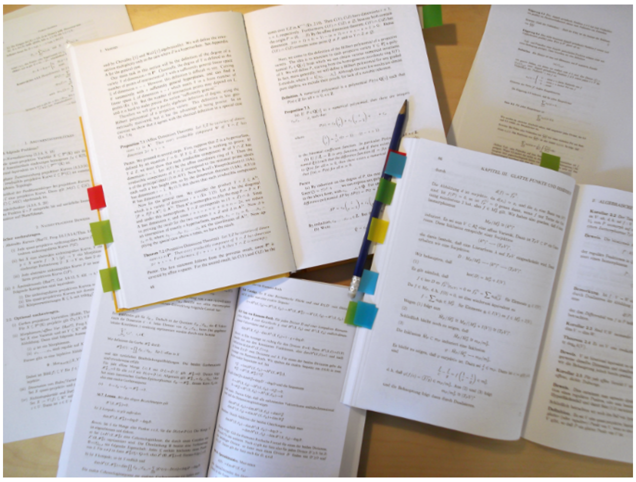

Foto: Florian Kranhold

Wie schreibt man eine Bachelorarbeit (nicht)? – S. 32

Vorwort

Vorwort zur Jubiläumsausgabe

Liebe Leserin, lieber Leser,

vor zwei Jahren, im April 2013, erschien mit der 03/2013-Veröffentlichung die erste Ausgabe des NEOLOGISMUS; infolgedessen ist die hier vorliegende eine Jubiläumsausgabe.

Seit der letzten Jubiläumsausgabe 03/2014 ist einiges passiert: Einerseits haben wir unser Design sowie die Unterteilung der Rubriken ein wenig angepasst, wie bereits in der 09/2014-Ausgabe in meinem Vorwort beschriebem wurde; andererseits ist der Umfang unserer gemeinsamen monatlichen Veröffentlichungen besonders in den Ausgaben 08/2014 – 10/2014 nahezu monoton auf ein zufriedenstellendes Maß angewachsen. Auch unsere Website, neologismus-magazin.de, wurde erweitert und modernisiert, wie MICHAEL THIES in einer der folgenden Ausgaben beschreiben wird.

Wir hoffen, Ihnen auch weiterhin ein vielfältiges Angebot sowie ein fachlich breites Spektrum an Artikeln anbieten zu können, was zum einen voraussetzt, dass uns weiterhin etwas Formulierbares und Veröffentlichungswürdiges einfällt, und zum anderen mit dem Wunsch verbunden ist, dass Sie, lieber Leser, Ihr Interesse an unserem Magazin behalten.

In diesem Sinne wünsche ich Ihnen viel Spaß bei der Lektüre des NEOLOGISMUS.

Mit freundlichen Grüßen

Florian Kranhold,
Chefredakteur,

Tübingen, der 27. März 2015

Neologismus Transparenzbericht

Wir als Redaktion des Neologismus bemühen uns, monatlich ein möglichst unabhängiges, freies und transparentes Magazin herauszugeben. Daher möchten wir hier unsere grundlegende Arbeitsweise öffentlich machen.

Beiträge

Der Neologismus ist keine Fachzeitschrift für ein bestimmtes Thema, sondern versteht sich vielmehr als Veröffentlichungsplattform der beteiligten Autoren. Die Redaktion besteht aus Studenten, die jeden Monat ihre Gedanken, Erkenntnisse und Ergebnisse kreativer Arbeit in schriftlicher und graphischer Form sammeln und im Neologismus veröffentlichen.

Durch die Diversität der Autoren und ihrer Interessen vertritt der Neologismus keine geschlossene Meinung, bietet aber eine große Vielfalt an Themen. Die Meinung in den Beiträgen unterliegt keiner (partei-)politischen oder gesellschaftlichen, religiösen oder weltanschaulichen Richtlinie. Wir fordern jedoch eine offene inhaltliche Diskussion und Toleranz im Sinne der Menschenwürde und Menschenrechte. Dabei behalten wir uns vor, Artikel abzulehnen, die nach Meinung der Redaktion diesen Grundsätzen widersprechen.

Über gegen den Willen des Autors aus inhaltlichen Gründen nicht veröffentlichte Beiträge werden wir auf unserer Website unter Angabe von Titel, Autor und Gründen informieren. Bislang ist es dazu jedoch noch nicht gekommen.

Redaktionsbeiträge

Jedes Redaktionsmitglied kann jederzeit Artikel schreiben. Häufig werden diese intern den anderen Redaktionsmitgliedern vorgelegt, die die Artikel korrekturlesen und inhaltliches Feedback geben. Haben Autor und Chefredakteur nichts dagegen, werden die Beiträge in der Regel in der nächsten Ausgabe veröffentlicht.

Gastbeiträge

Prinzipiell kann sich jeder Leser (und auch Nichtleser) als Gastautor im Neologismus einbringen und Beiträge schreiben. Dazu kann er sich an ein Redaktionsmitglied oder an unsere Mail-Adresse info@neologismus-magazin.de wenden. Die Gastbeiträge werden prinzipiell der Redaktion intern vorgelegt, die Rechtschreibfehler korrigiert und diskutiert, ob der Beitrag veröffentlicht werden soll. Bei inhaltlichen Änderungsvorschlägen wird Kontakt mit dem Autor gesucht. Das letzte Wort und die letztendliche Entscheidung hat unser Chefredakteur. Grundvoraussetzung für eine Veröffentlichung ist jedoch die Einverständnis des Autors, den Artikel unter seinem bürgerlichen Namen zu veröffentlichen und mit diesem für den Inhalt des Beitrags einzustehen sowie, dass wir in Kenntnis einer vollständigen Post-Anschrift und Mail-Adresse des Autors sind.

Beiträge, die ausschließlich von Gastautoren stammen, werden entsprechend gekennzeichnet. Aus Datenschutzgründen veröffentlichen wir nicht zwangsweise die E-Mail-Adresse der Autoren, stellen jedoch gerne den Kontakt mit ihnen her. (Dazu bitte an info@neologismus-magazin.de schreiben.)

Titelthemen

Über die Titelthemen der Ausgaben entscheidet der Chefredakteur im Sinne der Redaktion.

Gleichberechtigung

Neben den erwähnten Funktionen des Chefredakteurs sind alle Mitglieder der Redaktion in organisatorischen und techischen Belangen gleichberechtigt.

Lizenz

Alle eigenen Inhalte des Neologismus werden unter einer Creative Commons-Lizenz veröffentlicht. Es handelt sich dabei um die Lizenz CC BY-NC-SA 3.0 DE (Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland). Die genauen Bedingungen dieser Lizenz in verständlicher Sprache, sowie der vollständige Lizenzvertrag können hier nachgelesen werden: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/.

Wenn Sie unsere Inhalte von dieser Lizenz abweichend nutzen möchten, kontaktieren Sie uns bitte: info@neologismus-magazin.de.

Einige Bilder und andere Fremdinhalte können gegebenenfalls einer anderen Lizenz unterliegen. Die genauen Bedingungen sind der Angabe oder der verlinkten Quelle zu entnehmen.

Finanzierung

Der Neologismus finanziert sich ausschließlich privat durch die Redaktionsmitglieder, die für wenige Euro im Jahr die Website mieten. Wir veröffentlichen im Magazin und schalten auf unserer Website keine Werbung. Geldspenden lehnen wir aufgrund unserer Unabhängigkeit ab.

Wer jedoch gerne etwas beitragen möchte, kann dies durch das Einsenden von Gastartikeln oder durch Werbung für den Neologismus tun.

Inhaltsverzeichnis

Chefredakteur:
Florian Kranhold

Layout:
Tobias Gerber, Florian Kranhold
Erstellt mit LaTeX

Logo:
Michael Thies

Autoren:
Lukas Heimann, Marc Zerwas, Florian Kranhold, Charlotte Mertz, Jannik Buhr

Gastautoren:
Christoph Heid, Philip Schwartz, Louisa Stenz, Anna Dilgen

Redaktionsanschrift:
Florian Kranhold
Rottenburger Straße 8
72070 Tübingen

Kontakt:
neologismus-magazin.de
facebook.com/neologismus.magazin
info@neologismus-magazin.de

Die gedruckten Artikel geben nicht immer die Meinung der Redaktion wieder. Änderungen der eingereichten Artikel behalten wir uns vor. Trotz sorgfältiger Prüfung übernehmen wir keine Haftung für die Richtigkeit der abgedruckten Veröffentlichungen.

Veröffentlicht am 10. April 2015.

Politik und Gesellschaft

Einmal Pegida bitte!

Eindrücke von zwei Demonstrationen

von Lukas Heimann

Foto: Martin Gommel

Eigentlich sollte dieser Artikel ganz anders werden, als er es jetzt ist. Eigentlich wollte ich am Montag, 23. März, in die Karlsruher Innenstadt gehen und mich mit den Demonstranten der hier ansässigen Pegida Karlsruhe-Bewegung unterhalten und sie fragen, warum sie da sind, was sie bewegt und was sie sich von der Politik wünschen. Dieser Plan ist nicht wirklich aufgegangen. Ich war zwar mit einem Kommilitonen in der Innenstadt, habe aber von der Pegida-Demonstration selbst recht wenig mitbekommen. Von daher will ich hier meine Eindrücke schildern, von der ersten „richtigen“ Demonstration, die ich besucht habe. Doch fangen wir vorne an:

Prolog

Auch in Karlsruhe gibt es eine Pegida-Bewegung, die zu ihren Veranstaltungen immer 100 bis 200 Menschen in Karlsruhe, auf dem Stephansplatz hinter der Postgalerie, einem Einkaufszentrum im alten Hauptpostgebäude, zusammenbringt. Die Veranstaltungen, die immer den vollmundigen Facebook-Veranstaltungstitel „PEGIDA KARLSRUHE SPAZIERGANG [X].0“ tragen und in der Vergangenheit immer an Dienstagen stattfanden, lockten in der Regel eine 3 bis 4 mal so große Zahl Gegendemonstranten einer „NoKargida“-Bewegung an, die sich auf dem Europaplatz auf der anderen Seite der Postgalerie treffen.

Mir waren immer beide Seiten ein bisschen suspekt. Einerseits natürlich die Pegida-Anhänger, die sich vehement vor der Islamisierung fürchten, auch wenn die Fakten, wie ich sie sehe, dagegen sprechen. Andererseits aber auch die Gegendemonstranten, die zwar „in guter Sache“ unterwegs sind, aber allein durch ihre Anzahl und Konfrontationen mit Pegida-Demonstranten für die Blockaden des Alltagslebens in Karlsruhe und damit auch die Aufmerksamkeit für die Bewegung sorgen.

Ich selbst war und bleibe auch der Meinung, dass ich mir inhaltliche Aussagen zu beiden Bewegungen weitestgehend vermeiden sollte, bis ich nicht mit beiden Seiten geredet habe und verstehe, was da wer eigentlich im Detail will. Der logische Schritt also: beide Veranstaltungen mal beobachtenderweise besuchen.

Vor der Demo

Bevor ich zur Demo selbst komme, noch eine Beobachtung, die mich selbst stutzig gemacht hat: Termine trägt man in seinen Kalender ein. Mein Kalender liegt aus Komfortgründen bei Google. So wirklich wollte ich aber keinen Termin mit Titel „Pegida“ in den Kalender eintragen. Genauso Facebook – die Seite der Veranstaltung habe ich mehrfach aufgerufen, um mich zu informieren. Oder Twitter: Ich wollte so ein bisschen berichten, was ich da vorhabe. Aber bei alldem habe ich abgewogen, inwiefern diese Interaktionen im Nachhinein ausgewertet und im Zweifel gegen mich interpretiert werden können, wenn die falschen Schlüsse gezogen werden.

Am Morgen vor der Demonstration selbst stand die ganze Sache nochmal kurz vor dem Kippen: Die Betreiber der Postgalerie (wir erinnern uns, Einkaufszentrum) haben die Demonstrationen im Eilverfahren verbieten lassen wollen, weil sie in dieser Zeit erhebliche Umsatzeinbußen haben. Doch dann gab es (für meinen Geschmack etwas zu kurzfristig) doch noch grünes Licht.

Teil 1: Die Gegenveranstaltung

So bin ich gegen 19 Uhr, eine halbe Stunde vor Beginn der Pegida-Kundgebungen, auf dem Weg in Richtung Postgalerie. Die Polizei hat, nach negativen Erfahrungen bei den ersten „Spaziergängen“, die Pegida-Demonstranten eingezäunt und das Gebiet abgesichert. Knapp 300 m vor dem Ort der Kundgebungen stehen die ersten sieben grimmig guckenden und im Block stehenden Bereitschaftspolizisten an einer Straßenecke und man hat ein ähnliches Gefühl, wie wenn man in einem Geschäft ohne etwas gekauft zu haben an der Kasse vorbeigeht – bloß nicht verdächtig gucken, sonst greift man dich am Schluss raus, obwohl du nichts getan hast …

Aus diesem leichten Gefühl der Angst und Unsicherheit heraus haben sich mein Kommilitone und ich für die „sichere“ Seite der Demonstration entschieden, die nicht völlig abgeriegelt war: Die Seite der Gegendemonstranten. Die haben auch schon um kurz nach 19 Uhr angefangen: Knicklichter werden verteilt, ein Gewerkschafter und noch zwei andere Menschen halten Reden, es werden Flugblätter verteilt mit dem Inhalt „Also diese angeblichen Ausschreitungen der Linken letztes Mal … Die waren gar nicht wirklich so … Wir wollten nur andere Linke beschützen“. Trotz der Ankündigung, der Bahnverkehr werde für die Veranstaltungen umgeleitet, fahren weiterhin regelmäßig Straßenbahnen am Veranstaltungsort vorbei.

Teil 2: Wo ist Pegida?

Mein Interesse, zumindest einen Teil der Pegida-Aktion zu sehen, ist aber noch nicht befriedigt. Auf der Karlstraße (auf der ja auch noch Bahnen fuhren) kann man an der Postgalerie vorbeigehen. In der hinteren Ecke des Stephansplatzes steht tatsächlich eine Bühne, deren Dach man erkennen kann. Davor jedoch eine mit Flutlicht ausgeleuchtete Pufferzone aus Absperrungen und Sicherheitskräften, eine Querstraße zugeparkt mit drei Reihen Einsatzfahrzeugen. Und natürlich ein paar Demonstranten: Rote Fahnen, Musik, deren Text auf Antifaschismus schließen ließ. Jemand brüllt „Raus, ihr Nazi-Hurensöhne!“ und ich komme nicht umher, zynisch zu bemerken: „Das ist der richtige Weg, Intoleranz zu begegnen: Mit Intoleranz.“

Es ist aber auch mir sympathischer Protest zu beobachten: Ein Schild „Das 19. Jahrhundert hat angerufen – es will sein Weltbild zurück!“, auf dessen Rückseite freundlich in etwa steht „Mit Einhörnern gegen Pegida!“.

Gegen halb 8 ist nicht nur Beginn der Pegida-Kundgebungen, sondern offensichtlich auch Ende der Kundgebungen der Gegenseite – Gegendemonstranten folgen uns um die Postgalerie, um (separiert durch den Polizeigürtel, in dem für jeden Demonstranten gefühlt ein Polizist stand) die Pegida-Demonstranten nicht nur beobachten, sondern in erster Linie auspfeifen zu können. Die unerträgliche Lautstärke macht es leider unmöglich zu verstehen, was am anderen Ende des Platzes verkündet wird. Eigentlich schade, dass inhaltliche Auseinandersetzung so unmöglich gemacht wird. Außerdem wurden die Gegendemonstranten selbst von Pegida-Anhängern nicht in dieser Art bei ihrer Kundgebung gestört.

Manchmal bilden sich Sprechchöre. Die Gegendemonstranten rufen „Es gibt / kein Recht / auf Nazipropaganda“, wozu mein leise gemurmelter Widerspruch nur ist „Naja, es gibt Meinungsfreiheit hier. Im Prinzip also schon“. Von den Pegida-Demonstranten hört man ein koordiniertes „Na-zis raaus! Nazis raaus! …“. Auch ein kurzes „Wir sind das Volk“, über das Pfeifen allerdings kaum zu hören. Ein paar Minuten später singt man bei Pegida die Nationalhymne. Zu diesem Zeitpunkt ist es bei den Gegendemonstranten relativ ruhig, hauptsächlich ist nur ein lauter Trommler hörbar, der aber (zu meiner leisen Freude) in doppeltem Tempo im Takt trommelt. Ich sehe eine Deutschland-Flagge, das einzige optische Zeichen, dass da tatsächlich Menschen stehen.

Dann ist die Kundgebung vorbei und der „Spaziergang“ scheint zu beginnen. Ein Trupp Bereitschaftspolizisten läuft in Richtung Pegida, wahrscheinlich, um den Platz von hinten abzusichern. Wenige Minuten später macht sich auch eine kleinere Einheit mit roten Metallflaschen auf dem Rücken auf den Weg in diese Richtung. Tränengas? Ich weiß es nicht.

Neben mir steht eine Frau, offensichtlich Anwohnerin im von der Polizei gesperrten Bereich, die sich am Telefon über die massive Behinderung ihres Alltags ärgert. Diese Demonstrationen wären für niemanden gut. Außer vielleicht für den Betreiber des Parkhauses der Postgalerie, der die geparkten Autos (leider) beim letzten Mal bis 21 Uhr drinbehalten musste.

Die Gegendemonstranten an ihrem „Beobachtungsposten“ machen sich auf jeden Fall langsam auf den Weg und gehen wieder auf die andere Seite der Postgalerie. Entweder mit der Bahn nach Hause oder zu Fuß in die Richtung, in die auch Pegida marschiert. Ich umrunde mit meinem Kommilitonen den abgesperrten Bereich weiträumig (keine Anzeichen von Protesten, wenig Polizisten) und mache mich auf den Heimweg.

Da, wo früher am Abend die ersten Polizisten standen und die Sperrung für den Verkehr beginnt, wurde es nochmal kurz spannend: Gegendemonstranten laufen über die befahrene Baustellenkreuzung und verschieben Baustellenabsperrungen. Ich gehe nicht näher nachsehen, bleibe aber mit ein paar schaulustigen Passanten kurz stehen. Ein junger Mann mit Bierflasche erklärt, da stünden sich Demonstranten und Gegendemonstraten direkt gegenüber! Auch wenn das im Rückblick scheinbar nicht gestimmt hat, scheint der Trupp Polizisten in Schutzausrüstung, der vorbeijoggt, leicht angespannt. Dann ist die Straße aber wieder leer, und ich gehe nach Hause.

Epilog

Am Abend selbst habe ich mir noch überlegt, was für mich von den Demonstrationen übriggeblieben ist. Die spontane Antwort war „kalte Finger“.

Ich hätte gerne mehr mitbekommen, wofür man bei Pegida so steht, was aber leider wie erwähnt nicht möglich war.

Daher möchte ich auch am Ende dieses Artikels kein wirkliches Fazit ziehen. Das überlasse ich jedem selber.

Wissenschaft und Technik

Neurobiological aspects of autism

VON CHRISTOPH HEID (Gastbeitrag)

Autism spectrum disorder (ASD) is the umbrella term for various illnesses which all originate from some defect in the brain's development. Two of the most well-known subgroups of these conditions are Classic Autism, which is in most cases simply called Autism, and Asperger Syndrome (AS). These illnesses are very common in today's society. Almost 1 out of 100 people are diagnosed to have some kind of Autism spectrum disorder.[Nap14]

Symptoms of ASD

Many patients who suffer from different types of ASD show similar patterns of behavior. You can identify three core problems which all people who suffer from ASD have in common. The most well-known effect of ASD is that the patient has a lot of trouble with social interaction and communication. This becomes manifest in difficulties of understanding body language and the emotions of others, which leads to great trouble in responding adequately to certain situations.[Zhu14]

You can also frequently observe distinctive and ritualized patterns of behavior. The most common is some form of repetitive behavior. These behavioral patterns are oftentimes subconscious, some examples being nail biting and teeth grinding.[Nap14] The third field concerns ASD patients' leisure activities. The hobbies of ASD patients are very restricted. They are often interested in just one very specific field and don't try anything new, or their hobby isn't very closely related to their field of interest.[Nap14]

Causes of ASD

It is very hard to find the causes for the various dysfunctions in the brain which can lead to ASD, and even today we don't really know the true reason for autism. Some studies have shown some genes which can play a role in the development of autism (Freitag, 2007). It was also shown that some agents like valporic acid can cause autism-like symptoms in rat embryos, but for humans there are no findings of valporic acid causing autism.[Arn05]

Phenotype of the brain

Although the exact causes of ADS are not quite clear, the neuroanatomy of an autistic brain is quite well-known. First of all, autistic children usually have a larger brain than non-autists.[Pen06] However, there is also some difference in the growth patterns of the brain between autists and non-autists as the autists become older. Due to the larger brain there is also an increase in gray and white matter, but this increase seems to disappear during adolescence.[Pen06] The amount of change in the volume of the brain is regionally very different. The frontal, parietal and temporal lobe are all affected by the enlargement, the most consistent change is in the frontal lobe.[Ama08] Even the very basic structure of the neocortex is different in autistic people. The neocortex is divided into seven layers. Especially in layers III and V you can identify microcolumns. These microcolumns vary in their appearance in autistic people, but the most consistent difference from non-ausistic people is the reduced width of the microcolumns.[Ama08] The amygdala, a region of the brain that is linked with emotion, differs quite strongly in autists. It is shown that the amygdala in autistic children is much larger than in normal children, but this change in size disappears when the children become adults. But nevertheless, the number of neurons in the amygdala differs from autists to non-autists. Autists usually have fewer neurons in the amygdala and the lateral cortex. These changes in the amygdala could be one of the reasons for the bad social skills of autists.[Ama08]

[Arn05] **Tara L. Arndt** et al. *The teratology of autism.* International Journal of Developmental Neuroscience. 2005 Apr/-May; Vol 23, Iss 2 – 3, p. 189 – 199

[Fre07] **Christiane M. Freitag**. *The genetics of autistic disorders and its clinical relevance: a review of the literature.* Mol Psychiatry. 2007 Jan; Vol 12, Iss 2 – 22

[Ama08] **David G. Amaral** et al. *Neuroanatomy of autism.* Trends in Neuroscience. 2008 Mar; Vol 31, Iss 3, p. 137 – 145

[Nap14] **Agnese Di Napoli** et al. *Genetic variation in the oxytocin receptor (OXTR) gene is associated with Asperger Syndrome.* Molecular Autism. 2014 Sep; Vol 5, Iss 48.

[Pen06] **Helen E. Penn.** *Neurobiological Correlates of Autism: A Review of Recent Research.* Child Neuropsychology: A Journal on Normal and Abnormal Development in Childhood and Adolescence. 2006; Vol 12, Iss 1

[Zho14] **Wei-Zhen Zhou** et al. *Statistical analysis of twenty years (1993 to 2012) of data from mainland China's first intervention center for children with autism spectrum disorder.* Molecular Autism. 2014; Vol 5, Iss 52

Quantenmechanik (nicht nur) für Mathematiker

Teil 1: Mathematische und konzeptionelle Grundlagen

von Philip Schwartz (Gastbeitrag)

Liebe Mathematiker, Physiker oder sonstwie interessierte Leser! Dieser Artikel soll der erste einer Reihe sein, die eine Einführung in die Quantenmechanik bietet, also in die physikalische Theorie, die zur Beschreibung von mikroskopischen Systemen verwendet wird. Dabei werde ich eine Herangehensweise wählen, die sich in einigen Punkten, unter anderem in Interpretationsfragen, stark von der „klassischen Lehrbuchart“ unterscheidet, dadurch aber einerseits gerade in diesen Interpretationsfragen hoffentlich klarer und andererseits von Anfang an besser geeignet für allgemeine Untersuchungen und moderne Fragestellungen ist. Der Grund dafür mag vor allem darin liegen, dass ich selber eine Quantenmechanik-Vorlesung gehört habe, die auf diese Weise „unorthodox“ war. An dem Skript dieser Vorlesung von Reinhard F. Werner[Wer14] werde ich mich in vielen Punkten orientieren.

Ich habe den Titel „für Mathematiker“ gewählt, weil ich eine sehr mathematische Herangehensweise verwenden werde; so werde ich beispielsweise die Postulate der Quantenmechanik nicht physikalisch motivieren, sondern sie eben postulieren, um dann ihre Eigenschaften und Interpretation zu diskutieren. Außerdem werde ich an den meisten Stellen versuchen, so mathematisch streng wie möglich zu sein.

Zum Verständnis sind grundlegende Kenntnisse in Funktionalanalysis sinnvoll; außerdem sollte man ein bisschen Maß- und Integrationstheorie kennen.

Dieser erste Artikel führt zunächst die benötigte mathematische Theorie und die verwendeten Schreibweisen ein, was leider recht viel Platz in Anspruch nimmt; anschließend werden wir uns den Grundkonzepten der Quantenmechanik zuwenden. Ich wünsche viel Spaß beim Lesen!

Mathematische Grundlagen und Konventionen

In diesem Abschnitt werden wir die im Folgenden benötigte funktionalanalytische Theorie aufbauen, dabei wird es vor allem um Erinnerung an bzw. Vorstellung von Konzepten in Verbindung mit beschränkten Operatoren auf Hilberträumen gehen. Außerdem werden dabei natürlich diverse Schreibweisen festgelegt. Einige fundamentale Resultate werde ich ohne Beweis zitieren, bei Interesse findet man diese an vielen Stellen in der Literatur.

Aufgrund der Natur dieses Abschnitts ist er leider größtenteils eine ellenlange Ansammlung von Definitionen; ich bitte, das zu entschuldigen.

Hilberträume

Definition 1.1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(i) $\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle$ (*Linearität im zweiten Argument*),

(ii) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (*Symmetrie* im reellen bzw. *Hermitizität* im komplexen Fall) sowie

(iii) $\langle u, u\rangle \geq 0$ und $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$ (*positive Definitheit*)

für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dabei bezeichnet $\bar{\lambda}$ die zu λ komplex konjugierte Zahl.

Aus den Eigenschaften (i) und (ii) folgt, dass Skalarprodukte auf reellen Vektorräumen bilinear sind und dass Skalarprodukte auf komplexen Vektorräumen *antilinear* (auch *konjugiert linear*, *semilinear*) im ersten Argument sind, d. h. $\langle\lambda u + \mu v, w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, w\rangle + \bar{\mu}\langle v, w\rangle$.

In der Mathematik werden komplexe Skalarprodukte meist als linear im *ersten* Argument definiert; in der Physik ist es jedoch üblich, das zweite Argument linear und damit das erste antilinear zu machen.

Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V induziert immer eine Norm $V \ni v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}$. Bezüglich dieser Norm ist das Skalarprodukt stetig.

Definition 1.2. Ein *Hilbertraum* ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der bezüglich der davon induzierten Norm vollständig ist, d. h. jede Cauchy-Folge konvergiert.

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *separabel* genau dann, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ gibt („abzählbar“ meint hier und im Folgenden „endlich oder abzählbar unendlich“).

Wir werden im Folgenden nur noch *komplexe* Hilberträume betrachten. Viele der Aussagen lassen sich jedoch analog auf den reellen Fall übertragen.

Definition 1.3. Eine *Orthonormalbasis* (ONB) eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist ein Orthonormalsystem $B \subset \mathcal{H}$, d. h.

$$\langle u, v\rangle = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases}$$

für alle $u, v \in B$, dessen lineare Hülle dicht in $\mathcal{H}$ liegt, $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span} B}$.

Äquivalent zur zweiten Bedingung sind die folgenden Charakterisierungen:

(i) Für jeden Vektor $u \in \mathcal{H}$ ist nur für abzählbar viele $v \in B$ das Skalarprodukt $\langle v, u\rangle$ nicht 0 ist und es gilt $\|u\|^2 = \sum_{v\in B} |\langle v, u\rangle|^2$ gilt (*parsevalsche Gleichung*).

(ii) $(\forall\, v \in B \langle v, u\rangle = 0) \implies u = 0$ (*Vollständigkeit*)

(iii) Für jeden Vektor $u \in \mathcal{H}$ ist nur für abzählbar viele $v \in B$

das Skalarprodukt $\langle v, u\rangle \neq 0$ und es gilt die Entwicklungsgleichung $u = \sum_{v\in B}\langle v, u\rangle \cdot v$ (*verallgemeinerte Fourier-Reihe*).

(iv) B ist ein *maximales Orthonormalsystem*, d. h. für jedes Orthonormalsystem B' mit $B \subset B'$ ist $B' = B$.

Aus der letzten Charakterisierung folgt mit dem Lemma von Zorn, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis besitzt. Für jeden Hilbertraum sind je zwei ONBen gleichmächtig, diese Mächtigkeit heißt die *(Hilbertraum-)Dimension* des Raums.

Man beachte, dass eine Hilbertraum-ONB i. Allg. (im unendlichdimensionalen Fall) *keine* Basis im Sinne der linearen Algebra ist, da sich nicht jeder Vektor $u \in \mathcal{H}$ als (endliche!) Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt, sondern sich nur durch Linearkombinationen beliebig annähern bzw. als „unendliche Linearkombination" (also als Reihe wie oben beschrieben) darstellen lässt. Deshalb kann die Hilbertraum-Dimension bei unendlichdimensionalen Hilberträumen auch echt kleiner sein als die Dimension im Sinne der linearen Algebra.

Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare ONB besitzt.

Das wichtigste Beispiel für Hilberträume sind die *L^2-Räume*:

Beispiel 1.4 (L^2-Räume)**.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Auf dem Vektorraum der quadratintegrablen Funktionen auf X,

$$\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{C} \text{ mb.}, \int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu < \infty \right\},$$

betrachten wir die Äquivalenzrelation $f \sim g :\iff f = g$ f. ü. und bilden den Quotientenraum

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)\big/\sim\,;$$

d. h. wir betrachten zwei Funktionen als äquivalent genau dann, wenn sie fast überall übereinstimmen (es ist üblich, etwas genau auch die Äquivalenzklassen als „Funktionen" zu bezeichnen). $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ wird mit dem durch

$$\langle f, g\rangle := \int_X \bar{f} g \mathrm{d}\mu$$

definierten Skalarprodukt zu einem Hilbertraum (die Vollständigkeit ist ein Spezialfall des *Satzes von Fischer-Riesz*).

Bei der Betrachtung von L^2-Räumen kann man oBdA annehmen, dass der betrachtete Maßraum semifinit ist, d. h. dass jede messbare Menge $M \in \mathcal{A}$, die keine Nullmenge ist, eine messbare Teilmenge $N \subset M$ mit endlichem, positiven Maß $0 < \mu(N) < \infty$ besitzt. Ist nämlich $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = \infty$, sodass alle messbaren Teilmengen von M entweder Nullmengen sind oder selbst wieder unendliches Maß haben, so verschwinden alle L^2-Funktionen fast überall auf M (würde eine Funktion nicht f. ü. auf M verschwinden, wäre das Integral über ihr Betragsquadrat unendlich und sie damit keine L^2-Funktion), d. h. man kann statt X als neuen Maßraum $X \setminus M$ betrachten, ohne den L^2-Raum zu verändern.

Im Folgenden seien alle betrachteten Maßräume semifinit.

Ist der betrachtete Maßraum eine messbare Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit den Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß, schreibt man einfach $L^2(X)$. $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist separabel, ebenso z. B. auch $L^2(\Omega)$ für beschränkte, offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ist der Maßraum $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ mit dem Zählmaß μ, so schreibt man abkürzend $\ell^2(X) := L^2(X, \mathcal{P}(X), \mu)$. In diesem Fall bilden die Funktionen, die jeweils an einem Punkt 1 sind und ansonsten 0, eine ONB. Man schreibt die Funktionen $f \in \ell^2(X)$, also $f\colon X \to \mathbb{C}$, oft als „Tupel" bzw. „Familien" $(f(x))_{x\in X} = (f_x)_{x\in X}$. Die oben beschriebene ONB ist in dieser Schreibweise die Menge der „Einheitstupel" $\left\{(\delta_{xy})_{x\in X} \in \ell^2(X) : y \in X\right\}$ mit

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}.$$

Für $X = \{1, \dots, n\}$ kann man also jede Funktion $f \in \ell^2(X)$ mit einem n-Tupel $(f(1), \dots, f(n)) \in \mathbb{C}^n$ identifizieren; das Skalarprodukt entspricht dann dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Also sind endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt ein Spezialfall von L^2-Räumen.

Definition 1.5. Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, so wird auch die direkte Summe $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ zu einem Hilbertraum mit den Skalarprodukt $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle_{\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2} := \langle u_1, v_1\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle u_2, v_2\rangle_{\mathcal{H}_2}$.

Möchte man allgemein für eine Familie von Hilberträumen $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ eine *direkte Summe* $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ definieren, die wieder ein Hilbertraum sein soll, so muss man beachten, dass die aus der linearen Algebra bekannte direkte Vektorraumsumme mit komponentenweisem Skalarprodukt im Allgemeinen nicht vollständig ist. Deshalb definiert man $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i := \left\{(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}_i^I : (\|u_i\|_{\mathcal{H}_i})_{i\in I} \in \ell^2(I)\right\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation und definiert das Skalarprodukt als $\langle (u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}\rangle_{\bigoplus_i \mathcal{H}_i} := \sum_{i\in I}\langle u_i, v_i\rangle_{\mathcal{H}_i}$.

Isomorphismen zwischen Hilberträumen sind gerade die linearen Isomorphismen, die die entscheidende Struktur, das Skalarprodukt, erhalten:

Definition 1.6. Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ ist ein linearer Isomorphismus (also eine bijektive lineare Abbildung) $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, der das Skalarprodukt erhält, d. h. $\langle Au, Av\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}_1}\ \forall u, v \in \mathcal{H}_1$.

Die Umkehrabbildung eines Hilbertraum-Isomorphismus ist wieder ein Isomorphismus. (Man kann das Ganze auch kategorientheoretisch betrachten und erhält als Isomorphismen in der Kategorie der Hilberträume mit skalarproduktерhaltenden linearen Abbildungen als Morphismen gerade den hier definierten Begriff.)

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $B \subset \mathcal{H}$ eine ONB, so ist nach der obigen Charakterisierung von ONBen $\mathcal{H} \cong \ell^2(B)$ über den Isomorphismus $\mathcal{H} \ni v \mapsto \left(\langle b, v\rangle\right)_{b\in B} \in \ell^2(B)$.

Umgekehrt entspricht jeder Isomorphismus $T\colon \mathcal{H} \to \ell^2(X)$ mit irgendeiner Menge X der Wahl einer ONB $\{T^{-1}((\delta_{xy})_{x\in X}) : y \in X\}$ von $\mathcal{H}$.

Ist $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ eine Zerlegung eines Maßraums $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in disjunkte messbare Mengen mit $\mu(X_i) > 0$, so gilt $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \cong \bigoplus_{i\in I} L^2(X_i, \mathcal{A}|_{X_i}, \mu|_{X_i})$, wobei der Isomorphismus durch Einschränkung der Funktionen gegeben ist, also $f \mapsto (f|_{X_i})_{i\in I}$.

Entsprechend gilt andersherum für paarweise disjunkte Maßräume $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i \in I$ mit jeweils $\mu_i(X_i) > 0$, dass $\bigoplus_{i\in I} L^2(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) \cong L^2(\bigcup_{i\in I} X_i, \sigma(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i), \mu)$, wobei $\sigma(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ die von $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet, also in diesem Fall $\sigma(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i) = \{\bigcup_{i\in I} M_i : M_i \in \mathcal{A}_i\}$, und das Maß μ über $\mu(\bigcup_{i\in I} M_i) = \sum_i \mu_i(M_i)$ für $M_i \in \mathcal{A}_i$ definiert ist (also gerade so, dass damit die vorige Konstruktion umgekehrt wird).

Ein wichtiges Resultat über Hilberträume ist der *Darstellungssatz von Riesz*, der es erlaubt, einen Hilbertraum mit seinem topologischen Dualraum zu identifizieren:

Satz 1.7 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann gibt es genau ein $u \in \mathcal{H}$ so, dass $f = \langle u, \cdot\rangle$ (d. h. $f(v) = \langle u, v\rangle\ \forall v \in \mathcal{H}$).*

Operatoren

Nachdem wir nun die Hilberträume eingeführt haben, wollen wir uns jetzt mit dem für die Quantenmechanik eigentlich entscheidenden Grundbegriff beschäftigen, nämlich dem des Operators.

Definition 1.8. Ein *Operator* zwischen zwei Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ ist eine lineare Abbildung. Die *(Operator-)Norm* eines Operators $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist

$$\begin{aligned}\|A\| &:= \sup_{u\in\mathcal{H}_1\setminus\{0\}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \\ &= \sup_{u\in\mathcal{H}_1, \|u\|=1} \|Au\|.\end{aligned}$$

A heißt *beschränkt* genau dann, wenn $\|A\| < \infty$.

Ein Operator *auf* einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Die Menge der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die Identität, die natürlich ein beschränkter Operator ist, schreiben wir oft auch als $\mathbb{1}$.

Ein Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.

Skalarprodukte der Form $\langle u, Av\rangle$ werden oft als *Matrixelemente* von A bezeichnet. Ein Operator ist durch seine Matrixelemente bestimmt: Gilt $\langle u, Av\rangle = \langle u, Bv\rangle\ \forall u \in \mathcal{H}_2, v \in \mathcal{H}_1$, so ist $0 = \langle u, (A-B)v\rangle\ \forall u \in \mathcal{H}_2, v \in \mathcal{H}_1$, insb. $0 = \langle (A-B)v, (A-B)v\rangle$; mit der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt $(A-B)v = 0\ \forall v \in \mathcal{H}_1$, d. h. $A = B$.

Entsprechend nennt man $\langle u, Au\rangle$ die *Diagonalelemente* eines Operators auf $\mathcal{H}$. In komplexen Hilberträumen (hier ist der Grundkörper $\mathbb{C}$ wichtig!) ist ein Operator komplett durch seine Diagonalelemente bestimmt, da man über die *Polarisationsidentität*

$$\begin{aligned}\langle u, Av\rangle = \frac{1}{4}\big(&\langle u+v, A(u+v)\rangle \\ &- \langle u-v, A(u-v)\rangle \\ &- \mathrm{i}\langle u+\mathrm{i}v, A(u+\mathrm{i}v) \\ &+ \mathrm{i}\langle u-\mathrm{i}v, A(u-\mathrm{i}v)\rangle\big)\end{aligned}$$

alle Matrixelemente aus Diagonalelementen zurückgewinnen kann.

Ist B eine ONB von $\mathcal{H}$, so kann man jeden beschränkten Operator A aufgrund der Linearität und der Stetigkeit in der Form

$$Av = \sum_{u\in B} \langle u, v\rangle Au$$

oder auch

$$Aw = \sum_{u\in B}\sum_{v\in B} \langle u, Av\rangle\langle v, w\rangle u$$

schreiben.

Die einfachsten nichttrivialen Operatoren auf L^2-Räumen sind Multiplikationsoperatoren:

Beispiel 1.9 (Multiplikationsoperatoren)**.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $a\colon X \to \mathbb{C}$ messbar und wesentlich beschränkt, d. h. es gebe ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|a| \le M$ f. ü. Dann ist die Abbildung $A\colon L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu), Af := af$ (also punktweise Multiplikation mit a, d. h. $(Af)(x) := a(x)f(x)$) wohldefiniert. Tatsächlich ist Af unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von f, da nach der Multiplikation wieder eine Äquivalenzklasse von fast überall gleichen Funktionen betrachtet wird; und af liegt wirklich im L^2-Raum, da

$$\begin{aligned}\int_X |af|^2 \mathrm{d}\mu &= \int_X \underbrace{|a|^2}_{\le M^2 \text{ f. ü.}} |f|^2 \mathrm{d}\mu \\ &\le M^2 \underbrace{\int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu}_{<\infty} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Damit ist A ein Operator auf $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, ein sogenannter *Multiplikationsoperator* (da er einfach mit der Funktion a multipliziert). Nach der obigen Rechnung ist außerdem $\|Af\| = \sqrt{\int_X |Af|^2 \mathrm{d}\mu} \le M\|f\|$, also $\|A\| \le M$, und A damit beschränkt. Man kann leicht zeigen, dass $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |a(x)| := \inf\{M \in \mathbb{R} : |a| \le M \text{ f. ü.}\}$.

Für den Spezialfall $\ell^2(\{1, \ldots, n\})$, also $\mathbb{C}^n$, multipliziert ein Multiplikationsoperator jeden Funktionswert, also jeden Eintrag des Tupels, mit einer beliebigen Zahl; dort entsprechen Multiplikationsoperatoren also Diagonaloperatoren bzw. -matrizen.

Definition 1.10. Für die Hintereinanderausführung zweier Operatoren A, B schreiben wir statt $A \circ B$ einfach AB und nennen dies auch oft ein *Produkt* von Operatoren.

Für zwei Operatoren A, B auf demselben Hilbertraum definieren wir den *Kommutator* $[A, B] := AB - BA$. Offensichtlich verschwindet er genau dann, wenn A und B *vertauschen* bzw. *kommutieren*, d. h. wenn $AB = BA$ gilt.

Beispiel 1.11. Da es beim Multiplizieren von komplexen Zahlen und damit beim punktweisen Multiplizieren von Funktionen nicht auf die Reihenfolge ankommt, kommutieren Multiplikationsoperatoren auf einem L^2-Raum.

Das Spektrum von Operatoren

Definition 1.12. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein Operator auf

$\mathcal{H}$. Das *Spektrum* von A, geschrieben $\sigma(A)$, ist die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die der Operator $\lambda \operatorname{id} - A$ nicht beschränkt invertierbar (d. h. invertierbar durch einen beschränkten Operator) ist. Die Elemente des Spektrums heißen *Spektralwerte*.

Da nach dem *Satz von der offenen Abbildung* die Inversen von *beschränkten* bijektiven Operatoren zwischen Banachräumen wieder beschränkt sind, lässt sich die Definition des Spektrums für beschränkte Operatoren ein wenig vereinfachen:
Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkt, so gilt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{id} - A \text{ nicht bijektiv}\}$.

Das Spektrum lässt sich in drei disjunkte Teile zerlegen:

Definition 1.13. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkt.

(i) Ist $\lambda \operatorname{id} - A$ nicht injektiv, so ist λ ein Eigenwert von A (tatsächlich bedeutet die nicht-Injektivität ja gerade, dass es ein $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gibt mit $\lambda u = Au$, also einen Eigenvektor). Die Menge aller Eigenvektoren von A heißt das *Punktspektrum* von A.

(ii) Die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda \operatorname{id} - A$ injektiv, aber nicht surjektiv ist, aber das Bild $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{id} - A)$ ein dichter Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, heißt das *kontinuierliche Spektrum* von A.

(iii) Die Menge aller anderen Spektralwerte von A, also die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda \operatorname{id} - A$ injektiv ist, aber das Bild $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{id} - A)$ nicht dicht in $\mathcal{H}$ ist, heißt das *Residualspektrum* von A.

Für Multiplikationsoperatoren besteht das Spektrum im Wesentlichen aus den Werten der Funktion, mit der multipliziert wird:

Beispiel 1.14. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{B}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu))$ die Multiplikation mit der wesentlich beschränkten Funktion $a \colon X \to \mathbb{C}$.

Da $\lambda \operatorname{id} - A$ die Multiplikation mit der Funktion $\lambda - a$ ist und da Inverse von Multiplikationsoperatoren wieder Multiplikationsoperatoren mit der inversen Funktion sind, erhalten wir für das Spektrum

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{id} - A \text{ nicht beschränkt invertierbar}\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{\lambda - a} \text{ nicht wesentlich beschränkt}\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists M \in \mathbb{R} : \left|\frac{1}{\lambda - a}\right| \leq M \text{ f. ü.}\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists M \in \mathbb{R} : |\lambda - a| \geq \frac{1}{M} \text{ f. ü.}\right\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists \varepsilon > 0 : |\lambda - a| \geq \varepsilon \text{ f. ü.}\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists \varepsilon > 0 : \mu(\{x \in X : |\lambda - a(x)| < \varepsilon\}) = 0\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \mu\left(a^{-1}(U_\varepsilon(\lambda))\right) \neq 0\right\},
\end{aligned}$$

wobei $U_\varepsilon(\lambda)$ die offene Kugel um λ mit Radius ε bezeichnet. Das Spektrum besteht also aus allen komplexen Zahlen λ, sodass das Urbild jeder Kugel um λ positives Maß hat. Diese Menge nennt man auch das *wesentliche Bild* der Funktion a (sozusagen das Bild bis auf bzgl. μ „vernachlässigbare Ausreißer“).

Wird $\lambda \in \sigma(A)$ auf einer Nichtnullmenge als Funktionswert angenommen, also $\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) \neq 0$, so ist λ ein *Eigenwert* von A: Die charakteristische Funktion $\chi_{a^{-1}(\{\lambda\})}$, also

$$\chi_{a^{-1}(\{\lambda\})}(x) = \begin{cases} 1 & x \in a^{-1}(\{\lambda\}) \\ 0 & x \notin a^{-1}(\{\lambda\}), \end{cases}$$

wird durch Multiplikation mit a auf ihr λ-faches abgebildet (falls $\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) = \infty$, ist diese charakteristische Funktion nicht quadratintegrabel und man muss stattdessen die charakteristische Funktion einer Teilmenge mit endlichem positivem Maß betrachten).

Alle anderen Spektralwerte, also die, die von a nur auf einer Nullmenge angenommen werden, sind Elemente des *kontinuierlichen Spektrums*. Um das zu zeigen, sei also $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) = 0$. Wir müssen zeigen, dass dann $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{id} - A)$ dicht in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ liegt, dass sich also jedes $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ als Grenzwert von Funktionen in $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{id} - A)$ schreiben lässt. Definiere dazu $X_n := a^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(\lambda)\right)$. Für $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ definieren wir dann Funktionen $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ durch $f_n(x) := \frac{1}{\lambda - a(x)} \cdot \chi_{X \setminus X_n}(x) \cdot f(x)$ (fast überall definiert, da $a = \lambda$ nur auf einer Nullmenge gilt!). Für diese gilt dann

$$\begin{aligned}
&\int_X |f_n|^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{X \setminus X_n} \underbrace{\left|\frac{1}{\lambda - a}\right|^2}_{\leq n^2 \text{ auf } X \setminus X_n} |f|^2 \mathrm{d}\mu \\
&\leq n^2 \int_{X \setminus X_n} |f|^2 \mathrm{d}\mu \\
&\leq n^2 \int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

also jeweils $f_n \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Weiterhin ist damit $(\lambda \operatorname{id} - A) f_n = \chi_{X \setminus X_n} \cdot f$. Für $n \to \infty$ konvergiert diese Funktionenfolge f. ü. punktweise gegen f; da außerdem f. ü. $|(\lambda \operatorname{id} - A) f_n| \leq f$ gilt und $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass $(\lambda \operatorname{id} - A) f_n$ bezüglich der L^2-Norm gegen f konvergiert. Es lässt sich also wirklich jedes quadratintegrable f als Grenzwert von Funktionen in $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{id} - A)$ schreiben.

Zusammengefasst haben wir also: Das Spektrum eines Multiplikationsoperators ist das wesentliche Bild der Funktion, mit der er multipliziert; die Funktionswerte, die auf einer Nichtnullmenge angenommen werden, sind Eigenwerte, und alle anderen Spektralwerte sind Elemente des kontinuierlichen Spektrums, das Residualspektrum ist leer.

Sämtliche Definitionen das Spektrum betreffend lassen sich wörtlich auf allgemeine Banachräume übertragen; ebenso gelten die Überlegungen zu Multiplikationsoperatoren genauso für Multiplikationsoperatoren auf allgemeinen L^p-Räumen, nicht nur für $p = 2$.

Adjungierte Operatoren

Definition 1.15. Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein beschränkter Operator. Für festes $u \in \mathcal{H}_2$ ist $\mathcal{H}_1 \ni v \mapsto \langle u, Av\rangle \in \mathbb{C}$ eine stetige lineare Abbildung, nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es damit ein eindeutig bestimmtes $w \in \mathcal{H}_1$ mit $\langle u, Av\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall v \in \mathcal{H}_1$. Dieses w bezeichnet man mit A^*u.

Von der auf diese Weise definierten Abbildung $A^*\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ (die also durch die Bedingung $\langle u, Av\rangle = \langle A^*u, v\rangle\ \forall u \in \mathcal{H}_2, v \in \mathcal{H}_1$ eindeutig bestimmt ist) kann man leicht nachweisen, dass sie linear ist; A^* heißt der *adjungierte Operator* zu A.

Natürlich gilt auch $\langle Av, u\rangle = \langle v, A^*u\rangle\ \forall u \in \mathcal{H}_2, v \in \mathcal{H}_1$ (durch komplexe Konjugation aus der Definition).

Das Adjungierte des adjungierten Operators ist wieder der ursprüngliche Operator, $(A^*)^* = A$. Für Produkte gilt $(AB)^* = B^*A^*$. Außerdem ist das Bilden des Adjungierten antilinear, d. h. gilt $(A+B)^* = A^* + B^*$ sowie $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Für die Normen gilt $\|A^*\| = \|A\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Beispiel 1.16. Ist $A \in \mathcal{B}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu))$ ein Multiplikationsoperator, so ist A^* die Multiplikation mit der komplex konjugierten Funktion (oder fast überall komplex konjugiert).

Definition 1.17. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *selbstadjungiert* genau dann, wenn $A^* = A$ gilt.

Beispiel 1.18. Ein Multiplikationsoperator ist genau dann selbstadjungiert, wenn die Funktion, mit der er multipliziert, fast überall reellwertig ist.

Lemma 1.19. *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle u, Au\rangle \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathcal{H}$.*

Beweis.

„$\Longrightarrow$“ Wir sehen

$$\begin{aligned}\langle u, Au\rangle &= \langle A^*u, u\rangle \\ &\overset{\text{(selbstad.)}}{=} \langle Au, u\rangle \\ &= \overline{\langle u, Au\rangle},\end{aligned}$$

d. h. $\langle u, Au\rangle \in \mathbb{R}$

„$\Longleftarrow$“: Es gilt

$$\begin{aligned}\langle u, A^*u\rangle &= \langle Au, u\rangle \\ &= \overline{\langle u, Au\rangle} \\ &\overset{\text{(Vor.)}}{=} \langle u, Au\rangle,\end{aligned}$$

also haben A und A^* die gleichen Diagonalelemente und stimmen damit überein. □

Definition 1.20. Ein Operator $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heißt *unitär* genau dann, wenn er beschränkt und bijektiv ist und $U^{-1} = U^*$ gilt.

Ist $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitär, so gilt $\langle Uu, Uv\rangle = \langle U^*Uu, v\rangle = \langle u, v\rangle$, d. h. U erhält das Skalarprodukt und ist damit ein Hilbertraum-Isomorphismus.

Ist umgekehrt $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein Isomorphismus, also bijektiv und skalarprodukterhaltend, so folgt daraus $\|U\| = 1$, also insb. die Beschränktheit, und damit $\langle u, v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle = \langle U^*Uu, v\rangle$. Damit ist $\mathrm{id}_{\mathcal{H}_1} = U^*U$, also folgt $U^* = U^{-1}$, d. h. U ist unitär. (Tatsächlich kann man sogar die Linearität aus der Erhaltung des Skalarprodukts folgern.)

Unitäre Operatoren sind also nichts anderes als Hilbertraum-Isomorphismen.

Definition 1.21. Ein Operator A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_1$ heißt *unitär äquivalent* zu einem Operator B auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_2$ genau dann, wenn es einen unitären Operator $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ gibt, sodass $A = U^*BU$. Das bedeutet gerade, dass A und B einander entsprechen unter dem Isomorphismus U, also unter dieser „Umbenennung der Vektoren“.

Normale Operatoren und der Spektralsatz

Definition 1.22. Ein Operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *normal* genau dann, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht, also $N^*N = NN^*$.

Beispiel 1.23. Da jeder Operator auf einem Hilbertraum mit sich selbst kommutiert, sind selbstadjungierte Operatoren normal. Außerdem sind unitäre Operatoren $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nach Definition normal, da $U^*U = \mathbb{1} = UU^*$.

Da für einen Multiplikationsoperator $A \in \mathcal{B}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu))$ der adjungierte Operator A^* auch ein Multiplikationsoperator ist (mit der komplex konjugierten Funktion) und je zwei Multiplikationsoperatoren kommutieren, sind Multiplikationsoperatoren normal.

Damit ist auch jeder Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, der unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator $A \in \mathcal{B}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu))$ ist, normal: Aus $T = U^*AU$ erhält man $T^*T = (U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = TT^*$.

Vom letzten Beispiel gilt auch die Umkehrung. Dies ist einer der wichtigsten Sätze der Operatortheorie, der sogenannte *Spektralsatz*:

Satz 1.24 (Spektralsatz für normale Operatoren)**.** *Jeder normale Operator ist unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator. Ist der betrachtete Hilbertraum separabel, kann der Maßraum σ-finit gewählt werden.*

Da Multiplikationsoperatoren die Verallgemeinerung von Diagonaloperatoren / -matrizen auf allgemeine L^2-Räume sind, nennt man eine solche Darstellung eines normalen Operators manchmal auch *Diagonalisierung.*

Der Name „Spektralsatz“ erklärt sich darin, dass für Multiplikationsoperatoren das Spektrum recht direkt in Form des wesentlichen Bildes „ablesbar“ ist. Da Multiplikationsoperatoren kein Residualspektrum haben, gilt dies allgemein für normale Operatoren.

Es gilt sogar eine Verallgemeinerung auf mehrere Operatoren:

Satz 1.25 (Spektralsatz für normale Familien)**.** *Jede Familie $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ von miteinander vertauschbaren normalen Operatoren, d. h. $[A_i, A_j] = 0\ \forall i, j \in I$, ist gemeinsam diagonalisierbar, d. h. es gibt einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und einen unitären Operator $U\colon \mathcal{H} \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, sodass UA_iU^* für alle $i \in I$ ein Multiplikationsoperator ist. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so kann $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-finit gewählt werden.*

Der Spektralsatz erlaubt die Definition des *Funktionalkalküls*, der es ermöglicht, Funktionen auf normale Operatoren anzuwenden:

Definition 1.26. Sei $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine messbare, wesentlich beschränkte Funktion und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator. Dann definieren wir den Operator $F(A)$ wie folgt:

Nach dem Spektralsatz ist A unitär äquivalent zur Multiplikation mit einer Funktion m; $F(A)$ soll unitär äquivalent zu dem Operator sein, den man erhält, indem man F auf die Funktionswerte anwendet, d. h. unitär äquivalent zur Multiplikation mit $F \circ m$. Genauer gehen wir folgendermaßen vor:

Es ist $A = UMU^*$ mit einem Multiplikationsoperator $M \in \mathcal{B}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu))$. $m\colon X \to \mathbb{C}$ sei die Funktion, mit der M multipliziert. Es sei $F(M)$ der Operator, der mit der Funktion $F \circ m\colon X \to \mathbb{C}$ multipliziert, für jedes $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ also $(F(M)f)(x) := F(m(x))f(x)$ für fast alle $x \in X$. Nun setzen wir $F(A) := UF(M)U^*$.

Der Spektralsatz und das Punktspektrum

Im Bezug auf das Punktspektrum lässt sich die Situation des Spektralsatzes noch vereinfachen. Sei dazu $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $U\colon \mathcal{H} \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein unitärer Operator, sodass U^*AU ein Multiplikationsoperator ist; $m\colon X \to \mathbb{C}$ sei die Funktion, mit der U^*AU multipliziert. Für jeden Eigenwert λ von N (also Elemente des Punktspektrums) ist dann $\mu(m^{-1}(\{\lambda\})) \neq 0$, also gilt

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \cong L^2\left(m^{-1}(\{\lambda\}), \mathcal{A}|_{m^{-1}(\{\lambda\})}, \mu|_{m^{-1}(\{\lambda\})}\right) \oplus L^2\left(\tilde{X}, \mathcal{A}|_{\tilde{X}}, \mu|_{\tilde{X}}\right)$$

mit $\tilde{X} := X \setminus m^{-1}(\{\lambda\})$, d. h. der L^2-Raum zerfällt in den Eigenraum zu λ und den „Rest“. Indem man von diesem Eigenraum $L^2\left(m^{-1}(\{\lambda\}), \mathcal{A}|_{m^{-1}(\{\lambda\})}, \mu|_{m^{-1}(\{\lambda\})}\right)$ eine ONB wählt, erhält man weiter $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \cong \ell^2(B_\lambda) \oplus L^2\left(\tilde{X}, \mathcal{A}|_{\tilde{X}}, \mu|_{\tilde{X}}\right)$. Indem man nun B_λ und $\tilde{X}$ wieder zu einem Maßraum Y zusammenfügt, wobei man auf B_λ das Zählmaß beibehält, ist damit der ursprünglich betrachtete Operator N unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf $L^2(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$, wobei die Funktion, mit der multipliziert wird, den Funktionswert λ auf einer Teilmenge annimmt, auf der das Maß μ_Y einfach das Zählmaß ist. Indem man diese Konstruktion nun auf *alle* Eigenwerte (also das gesamte Punktspektrum) von N anwendet, erhält man also, dass im Spektralsatz der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und die multiplizierende Funktion m oBdA so gewählt werden können, dass die Eigenwerte des betrachteten normalen Operators genau auf einer solchen Teilmenge X von der Funktion m angenommen werden, auf der das Maß μ das Zählmaß ist. (Das erklärt auch den Namen „Punktspektrum“ für die Menge der Eigenwerte, da das Zählmaß eben jeden einzelnen Punkt zählt.)

Hat ein normaler Operator *nur* Punktspektrum, so erhalten wir insbesondere, dass er unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf einem ℓ^2-Raum ist. Dies entspricht aber gerade einer Wahl einer ONB im ursprünglichen Hilbertraum, sodass die Basisvektoren Eigenvektoren sind:

Satz 1.27 (Spektralsatz für normale Operatoren mit reinem Punktspektrum)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator, dessen Spektrum nur aus Eigenwerten besteht. Dann gibt es eine ONB B von $\mathcal{H}$, die aus Eigenvektoren von A besteht. A hat dann die Form $Av = \sum_{b\in B} \lambda_b \langle b, v\rangle b$ mit $\lambda_b \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Nach den obigen Überlegungen gibt es eine Menge X und ein unitäres $U\colon \mathcal{H} \to \ell^2(X)$, sodass UAU^* ein Multiplikationsoperator auf $\ell^2(X)$ ist. m sei die Funktion, mit der dieser Operator multipliziert. Eine ONB von $\ell^2(X)$ bilden die charakteristischen Funktionen der einelementigen Teilmengen, $\left\{\chi_{\{y\}} \in \ell^2(X) : y \in X\right\}$; für diese gilt jeweils

$$\begin{aligned}&\left(UAU^*\chi_{\{y\}}\right)(x)\\ &= \left(m \cdot \chi_{\{y\}}\right)(x)\\ &= \begin{Bmatrix} m(x)\cdot 1 & x = y\\ 0 & x \neq y\end{Bmatrix}\\ &= m(y)\cdot\chi_{\{y\}}(x),\end{aligned}$$

also $UAU^*\chi_{\{y\}} = m(y)\chi_{\{y\}}$ bzw. $AU^*\chi_{\{y\}} = m(y)U^*\chi_{\{y\}}$. Die Vektoren $b_y := U^*\chi_{\{y\}} \in \mathcal{H}$ sind also Eigenvektoren von A; außerdem ist $B = \{b_y : y \in X\}$ eine ONB von $\mathcal{H}$, da die $\chi_{\{y\}}$ eine ONB von $\ell^2(X)$ bilden.

Die behauptete Form für A folgt dann mithilfe der Entwicklungsformel für Vektoren in einer ONB. □

Positive Operatoren

Definition 1.28. Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *positiv semidefinit* oder kurz *positiv*, geschrieben $A \geq 0$, genau dann, wenn $\langle u, Au\rangle \geq 0\ \forall u \in \mathcal{H}$.

Implizit wird dabei natürlich mit gefordert, dass die Diagonalelemente reell sind; jeder positive Operator ist also insbesondere selbstadjungiert.

Insbesondere können positive Operatoren also diagonalisiert werden, d. h. sind unitär äquivalent zu Multiplikationsoperatoren. Die Multiplikation mit einer Funktion $a\colon X \to \mathbb{C}$ ist aber genau dann ein positiver Multiplikationsoperator, wenn $\int_X |f(x)|^2 a(x) \mathrm{d}\mu(x) \geq 0 \; \forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, wenn also $a \geq 0$ fast überall. Positive Operatoren sind also genau die Operatoren, die unitär äquivalent zur Multiplikation mit einer nichtnegativen, wesentlich beschränkten Funktion sind. Anders gesagt sind also positive Operatoren normale Operatoren, deren Spektrum eine Teilmenge der nichtnegativen reellen Zahlen ist.

Über den Funktionalkalkül für die Funktion $\sqrt{|\cdot|}$ können wir damit für einen positiven Operator A die *Wurzel* $\sqrt{A} := \sqrt{|A|}$ definieren. Sie ist ebenfalls positiv und erfüllt $A = \sqrt{A}^2$ (sie ist über diese beiden Eigenschaften sogar eindeutig charakterisiert).

Lemma 1.29. *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann positiv, wenn es ein $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt mit $A = B^*B$.*

Beweis. **„$\Longrightarrow$“:** Setze $B := \sqrt{A}$.

„$\Longleftarrow$“: Für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle u, Au\rangle &= \langle u, B^*Bu\rangle \\ &= \langle Bu, Bu\rangle \\ &= \|Bu\|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

□

Definition 1.30. Für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ schreiben wir $A \leq B$ oder $B \geq A$ genau dann, wenn $B - A \geq 0$ ist.

$\leq$ ist eine Halbordnung auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nach Definition gilt $A \leq B \iff \langle u, Au\rangle \leq \langle u, Bu\rangle \; \forall u \in \mathcal{H}$.

Spurklasse-Operatoren

Eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielt die Spur von Operatoren. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall lässt sie sich nicht für alle Operatoren definieren:

Definition 1.31. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Für einen beschränkten Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist $A^*A \geq 0$, also ist $\sqrt{A^*A}$ definiert. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt nun *Spurklasse-Operator* genau dann, wenn für eine (und damit jede) ONB B von $\mathcal{H}$ die Summe $\sum_{u \in B} \langle u, \sqrt{A^*A}u\rangle$ endlich ist. In diesem Fall ist auch $\operatorname{tr} A := \sum_{u \in B} \langle u, Au\rangle$ absolut konvergent und unabhängig von der Wahl der ONB. $\operatorname{tr} A$ heißt *Spur* von A.

Man kann zeigen, dass die Spurklasseoperatoren einen Vektorraum bilden und die Spur linear ist.

Offensichtlich ist die Spur positiver Operatoren nichtnegativ, wenn existent.

Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Spurklasse und $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beliebig, so sind auch AB und BA Spurklasse (ohne Beweis). Ist A Spurklasse, so auch A^*.

Sind $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ und $B\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ Operatoren, sodass AB und BA Spurklasse sind, so gilt $\operatorname{tr}_{\mathcal{H}_2}(AB) = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_1}(BA)$ (*Zyklizität der Spur*, ohne Beweis).

Lemma 1.32. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sind $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A \geq 0$ und Spurklasse sowie $B \geq 0$, so ist $\operatorname{tr} AB \geq 0$.*

Beweis. $B \geq 0 \iff B = C^*C$ mit $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\Longrightarrow \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} AC^*C = \operatorname{tr} CAC^* \geq 0$, denn wegen $A \geq 0$ ist auch $CAC^* \geq 0$ ($A \geq 0 \iff A = D^*D \Longrightarrow CAC^* = CD^*DC^* = (DC^*)^*(DC^*) \geq 0$). □

Man kann außerdem zeigen, dass Spurklasse-Operatoren reines Punktspektrum haben, also weder kontinuierliches noch Residualspektrum. (Z. B. kann man zeigen, dass sie kompakte Operatoren sind, und die Theorie darüber nutzen.)

Projektoren

Definition 1.33. Ein Operator P auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *Projektion* genau dann, wenn $P^2 = P$. Eine Projektion heißt *Orthogonalprojektion* oder kurz *Projektor* genau dann, wenn zusätzlich $\langle Pv, v - Pv\rangle = 0 \; \forall v \in \mathcal{H}$ gilt.

Ist P eine Projektion auf $\mathcal{H}$, so gilt $\mathcal{H} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$: Jeder Vektor $v \in \mathcal{H}$ lässt sich schreiben als $v = (v - Pv) + Pv$, der erste Summand liegt wegen $P^2 = P$ in $\ker P$ und der zweite in $\operatorname{im} P$; außerdem ist $\ker P \cap \operatorname{im} P = 0$, denn $v \in \ker P \cap \operatorname{im} P \Longrightarrow v = Pu \Longrightarrow 0 \overset{(v \in \ker P)}{=} Pv = P^2u = Pu = v$. In diesem Sinne „projiziert“ P auf den Unterraum $\operatorname{im} P$: Es zerlegt jeden Vektor auf eindeutige Weise in einen Anteil in diesem Unterraum und den „Rest“, der im Kern liegt.

Bei einer Orthogonalprojektion sind diese beiden Anteile bezüglich des Skalarprodukts orthogonal, daher der Name. Man kann sich leicht überlegen, dass eine Projektion genau dann eine Orthogonalprojektion ist, wenn sie beschränkt und selbstadjungiert ist; d. h. eine Orthogonalprojektion bzw. ein Projektor ist ein beschränkter Operator P mit $P^2 = P = P^*$.

Das Bild eines Projektors ist immer ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$, und zu jedem abgeschlossenen Unterraum gibt es einen eindeutig bestimmten Projektor, dessen Bild der Unterraum ist.

Projektoren P erfüllen immer $0 \leq P \leq \mathbb{1}$.

Beispiel 1.34. Ist $u \in \mathcal{H}$ normiert, d. h. $\|u\| = 1$, so ist $\mathcal{H} \ni v \mapsto \langle u, v\rangle u \in \mathcal{H}$ der Projektor auf den eindimensionalen Unterraum $\operatorname{span}\{u\}$.

Lemma 1.35. *Sei $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Projektor und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $P \geq A \geq 0$. Dann ist $A = PA = AP = PAP$.*

Beweis. Allgemein folgt aus $B \geq 0$ für beliebige $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ direkt nach Definition $C^*BC \geq 0$.

Aus der Voraussetzung $0 \leq A \leq P$ erhalten wir damit $0 \leq (\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P) \leq (\mathbb{1} - P)P(\mathbb{1} - P) \overset{(P^2=P)}{=} 0$, also $0 = (\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P)$. Für $X := \sqrt{A}(\mathbb{1} - P)$ gilt also $X^*X = 0$, damit folgt $0 = \langle u, X^*Xu\rangle = \langle Xu, Xu\rangle \; \forall u \in \mathcal{H}$, also $X = 0$.

Damit folgt nun $0 = \sqrt{A}X = A(\mathbb{1} - P)$, also $A = AP$. Adjungieren ergibt $A = A^* = (AP)^* = PA$, und schließlich erhält man $A = PA \overset{(A=AP)}{=} PAP$. □

Die Bra-Ket-Schreibweise

Eine Vereinfachung in vielen Rechnungen bietet die von Paul Dirac erfundene sogenannte *Bra-Ket-Schreibweise*, die wir nun besprechen wollen.

Sei dazu $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zu jedem Vektor $u \in \mathcal{H}$ defninieren wir den Operator $|u\rangle : \mathbb{C} \to \mathcal{H}, \lambda \mapsto \lambda u$. Dieser Operator heißt das zu u gehörige *Ket*. Das zugehörige *Bra* $\langle u|$ ist der adjungierte Operator $\langle u| := |u\rangle^* : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$.

Man kann sich leicht überlegen, dass ein Bra $\langle u|$ einen beliebigen Vektor $v \in \mathcal{H}$ auf das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle$ abbildet, also $\langle u|(v) = \langle u, v\rangle$.

Das Produkt (also die Hintereinanderausführung) aus einem Bra $\langle u|$ und einem Ket $|v\rangle$ ist ein Operator $\langle u||v\rangle$ auf $\mathbb{C}$. Operatoren auf $\mathbb{C}$ multiplizieren aber immer einfach nur mit einer komplexen Zahl (1×1-Matrizen!), wir können sie also jeweils mit dieser Zahl identifizieren. Der Operator $\langle u||v\rangle$ bildet eine beliebige komplexe Zahl λ auf $\big(\langle u||v\rangle\big)(\lambda) = \langle u|\big(|v\rangle(\lambda)\big) = \langle u|(\lambda v) = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ ab, $\langle u||v\rangle$ ist also die Multiplikation mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle$. Wir identifizieren also den Operator $\langle u||v\rangle$ mit der Zahl $\langle u, v\rangle$; außerdem schreiben wir dafür auch $\langle u|v\rangle$. So erklären sich auch die Schreibweise und die Namen für Bras und Kets: Ein Bra und ein Ket ergeben zusammen eine Skalarprodukt-Klammer, “a bracket”.

Natürlich kann man die Operatoren auch in der anderen Reihenfolge hintereinanderausführen; so erhält man ein „Ketbra“ $|v\rangle\langle u|$, einen Operator auf $\mathcal{H}$. Das Ketbra $|v\rangle\langle u|$ bildet Vektoren $w \in \mathcal{H}$ ab auf $|v\rangle\langle u|(w) = |v\rangle(\langle u, w\rangle) = \langle u, w\rangle v$, d. h. es gilt $|v\rangle\langle u| = (w \mapsto \langle u, w\rangle v)$.

Man kann also z. B. für einen normierten Vektor $u \in \mathcal{H}$ den Projektor auf $\operatorname{span}\{u\}$ einfach als $|u\rangle\langle u|$ schreiben.

Matrixelemente $\langle u, Av\rangle$ kann man mit der Bra-Ket-Notation auch als $\langle u|A|v\rangle$ schreiben.

Eine der wesentlichen Vereinfachungen durch die Bra-Ket-Schreibweise ist es, dass sich für eine ONB B die Entwicklungsformel $v = \sum_{u\in B}\langle u, v\rangle u$ in der kurzen, leicht merkbaren Form

$$\mathbb{1} = \sum_{u\in B} |u\rangle\langle u|$$

schreiben lässt. Dabei ist zu beachten, dass bei dieser Summe die Konvergenz bei Anwendung auf Vektoren gemeint ist (also Konvergenz in der sogenannten *starken Operatortopologie*), bezüglich der Operatornorm konvergiert die Summe *nicht* (im unendlich-dimensionalen Fall). Das Einfügen eines Identitätsoperators in eine Gleichung und Ausschreiben mit dieser Formel nennt man oft „Einschieben einer Eins“. Damit lassen sich viele Rechnungen sehr kurz notieren, beispielsweise die Herleitung der Darstellung eines Operators in seinen Matrixelementen in der ONB, $Aw = \sum_{u\in B}\sum_{v\in B}\langle u, Av\rangle\langle v, w\rangle \cdot u$:

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1}A\mathbb{1} \\ &= \sum_{u\in B} |u\rangle\langle u|A\left(\sum_{v\in B}|v\rangle\langle v|\right) \\ &= \sum_{u,v\in B} |u\rangle\langle u|A|v\rangle\langle v| \end{aligned}$$

Bei allen solchen Rechnungen ist zu beachten, dass die Konvergenzen nur bei Anwendung auf Vektoren gelten und im Allgemeinen nicht für die Operatoren bzgl. der Operatornorm.

Postulate und Grundbegriffe der Quantenmechanik

Nach der Einführung der benötigten mathematischen Werkzeuge können wir uns nun wirklich die konzeptionellen Grundlagen der Quantenmechanik ansehen. Sie ist eine grundlegend statistische physikalische Theorie, und viele vermeintliche Paradoxien und interpretatorische Unklarheiten lassen sich vermeiden, wenn man sie durchgängig statistisch interpretiert. Deshalb werden wir uns zunächst mit den Grundkonzepten von statistischen Theorien befassen, um dann die Postulate einzuführen, mit denen die Quantenmechanik physikalische Systeme beschreibt. Darauf aufbauend werden wir uns mit wichtigen abgeleiteten Begriffen der Quantenmechanik beschäftigen.

Abschließend werden wir einige Aussagen untersuchen, die oft in die Postulate der Quantenmechanik mit einbezogen werden, allerdigs einschränkend und auch gar nicht nötig sind.

Statistische Theorien

Möchte man physikalische Systeme mit einer statistischen Theorie beschreiben – also mit einer Theorie, die Wahrscheinlichkeiten als Ergebnisse liefert – und die Vorhersagen einer solchen Theorie mit Messergebnissen aus Experimenten vergleichen können, so muss man auch die Situationen, auf die die Theorie angewendet werden soll, in einer Art und Weise beschreiben, die der statistischen Interpretation Rechnung trägt.

Dafür ist es sinnvoll, die von der Theorie beschriebenen Experimente aufzuteilen in *Präparation* und *Messung*: Zunächst wird das zu untersuchende physikalische System in irgendeiner Art und Weise präpariert – es wird beispielsweise ein Teilchenstrahl erzeugt o. ä. –, anschließend wird am System eine Detektion, d. h. eine ja-nein-Messung, durchgeführt – beispielsweise wird gemessen, ob sich in einem bestimmten Raumbereich ein Teilchen befindet oder nicht. Eine statistische Theorie muss damit also mathematische Objekte zur Beschreibung der möglichen Präparierverfahren und der möglichen Detektionsverfahren festlegen, und es muss eine Formel geben, mit der für jede (sinnvolle) mögliche Kombination von Präparation und Messung die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass bei eben dieser Kombination von Präparation und Messung als Ergebnis „ja“ herauskommt.

Diese Wahrscheinlichkeiten werden dann gemäß dem „Gesetz der großen Zahlen“ interpretiert, d. h. wenn man das entsprechende Experiment genügend oft durchführt, sollte sich die relative Häufigkeit der „ja“-Ergebnisse der berechneten Wahrscheinlichkeit annähern, falls die Theorie zutrifft. Dabei ist zu beachten, dass die Experimente durch Präparation und Messung, also die entsprechenden *Verfahren* definiert werden; es kommt also nicht darauf an, dieselben Messgeräte oder sogar dasselbe System zu verwenden. Aufgrund von Veränderungen an System oder Geräten während der Messung (z. B. Abnutzungen) kann es sogar sein, dass zur Wiederholung desselben Experiments ein neuer Aufbau verwendet werden *muss*.

Bei durchgehend statistischer Interpretation beschreibt eine statistische Theorie also immer statistische Gesamtheiten gleicher Experimente, also Gesamtheiten von Experimenten, die bezüglich Präparation und Messung gleich sind. Dies mag in gewisser Weise einschränkend erscheinen, da es zunächst so wirken kann, als wäre es nicht möglich, so *einzelne* physikalische Systeme zu beschreiben. Aber natürlich ist dies dennoch möglich, nur dass eben „lediglich" Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen werden können. Ebenso können natürlich trotz der Bezeichnung als „Experiment" mit „Präparation" und „Messung" auch Vorgänge auf diese Art und Weise beschrieben werden, die außerhalb von Laboratorien stattfinden.

Die Quantenmechanik ist genau eine solche statistische Theorie, die „nur" Wahrscheinlichkeitsaussagen macht, und der Vergleich von theoretischen Vorhersagen mit experimentellen Ergebnissen findet genau auf die oben beschriebene Art und Weise statt. Wenn man dies im Hinterkopf behält – und damit insbesondere, dass immer „Ensembles" von gleichartigen Experimenten zu betrachten sind –, treten viele Probleme, die sich bei der Interpretation der Quantenmechanik ergeben können, gar nicht erst auf.

Ein wichtiger Aspekt von physikalischen Theorien wurde in der Betrachtung noch ausgelassen, nämlich die *Zeitentwicklung* von physikalischen Systemen. Man mag sich fragen, was in einer auf die oben beschriebene Weise statistisch interpretierten Theorie überhaupt mit einer Beschreibung der Zeitentwicklung gemeint ist – da sich die Aussagen der Theorie auf eine Gesamtheit von zwar gleichartigen, aber dennoch in sich „abgeschlossenen" Experimenten aus Präparation und Messung beziehen, kann ja nicht die Veränderung *eines* beschriebenen Systems mit der Zeit gemeint sein. Wenn man sich überlegt, wie vorausgesagte Ergebnisse über die Zeitentwicklung im Experiment überprüft werden, so wird klar, dass dabei Präparation und Messung mit einem entsprechenden relativen Zeitversatz durchgeführt werden; die Beschreibung von Zeitentwicklung in statistischen Theorien bedeutet also, den Einfluss einer Zeitdifferenz zwischen Präparation und Messung miteinzubeziehen.

Grundpostulate der Quantenmechanik

Mit den obigen Überlegungen zu statistischen Theorien können wir nun die Grundpostulate der Quantenmechanik formulieren. Wir verwenden im Folgenden ein Einheitensystem, in dem das reduzierte plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ den Wert 1 hat.

Postulat 1. *Jeder physikalischen Systemsorte wird ein separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ zugeordnet.*

Postulat 2. *Ein Präparierverfahren wird beschrieben durch einen* Dichteoperator *ρ auf $\mathcal{H}$, d. h. einen positiven Spurklasse-Operator $\rho \geq 0$ mit Spur $\operatorname{tr} \rho = 1$.*

Dichteoperatoren nennt man auch *Zustände* des Systems. Trotzdem sollte man immer im Gedächtnis behalten, dass diese „Zustände" Präparationen beschreiben, wie oben diskutiert.

Postulat 3. *Ein Messverfahren für eine ja-nein-Messung wird beschrieben durch einen* Detektoroperator *auf $\mathcal{H}$, d. h. einen Operator F mit $0 \leq F \leq \mathbb{1}$.*

Postulat 4. *Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor F bei Messung an einem gemäß ρ präparierten System das Ergebnis „ja" liefert, ist $\operatorname{tr}(\rho F)$.*

Da Dichteoperatoren ρ positiv und Spurklasse sind und für Detektoroperatoren F die Ungleichungen $0 \leq F, 0 \leq 1 - F$ gelten, folgt mit Lemma 1.32 $0 \leq \operatorname{tr}(\rho F)$ und $0 \leq \operatorname{tr}(\rho(1 - F)) = \operatorname{tr}(\rho) - \operatorname{tr}(\rho F) = 1 - \operatorname{tr}(\rho F)$, d. h. es gilt wirklich $\operatorname{tr}(\rho F) \in [0, 1]$, wie es für Wahrscheinlichkeiten sein sollte.

Zuletzt gibt es noch ein Postulat, das sich mit der Zeitentwicklung (im obigen Sinne) befasst:

Postulat 5. *Jeder Systemsorte wird ein selbstadjungierter Operator H auf $\mathcal{H}$ zugeordnet, der* Hamiltonoperator *des Systems genannt wird. Dieser bestimmt den unitären* Zeitentwicklungsoperator $U_t = \exp(-\mathrm{i}tH)$. *Führt man in einem Experiment mit Präparation ρ und Messung F die Präparation und die Messung mit einer Zeitdifferenz von t aus, so ist die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors* $\operatorname{tr}(U_t \rho U_t^* F)$.

Der Operator $\exp(-\mathrm{i}tH)$ wird dabei über den Funktionalkalkül definiert; man kann sich leicht überlegen, dass dies für selbstadjungiertes H tatsächlich unitär ist. Damit ist auch $U_t \rho U_t^*$ ein Dichteoperator, und somit liegen auch die Wahrscheinlichkeiten nach diesem Postulat zwischen 0 und 1.

Mit der Zyklizität der Spur kann man die Ansprechwahrscheinlichkeit auch als $\operatorname{tr}(\rho U_t^* F U_t)$ schreiben. Man kann diese beiden Ausdrücke folgendermaßen interpretieren: Bei der Version aus dem Postulat kann man $\rho_t := U_t \rho U_t^*$ als „zeitabhängigen" Dichteoperator betrachten, also mit der Bedeutung „Präpariere ρ und warte anschließend die Zeit t", und der Detektoroperator F bleibt zeitunabhängig; in der umgeschriebenen Form kann man als zeitabhängigen Detektoroperator $F_t := U_t^* F U_t$ definieren – „Warte die Zeit t und messe dann F" – und ρ als konstant ansehen. Diese beiden Sichtweisen nennt man das *Schrödingerbild* bzw. das *Heisenbergbild* der Zeitentwicklung.

Für den zeitabhängigen Dichteoperator im Schrödingerbild gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-\mathrm{i}tH)\rho\exp(\mathrm{i}tH))\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(-\mathrm{i}tH)\right)\rho\exp(\mathrm{i}tH) + \exp(-\mathrm{i}tH)\rho\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\mathrm{i}tH)\right)\\ &= -\mathrm{i}H\exp(-\mathrm{i}tH)\rho\exp(\mathrm{i}tH) + \exp(-\mathrm{i}tH)\rho\exp(\mathrm{i}tH)\mathrm{i}H\\ &= -\mathrm{i}[H,\rho_t],\end{aligned}$$

er ist also die eindeutig bestimmte Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_t = -\mathrm{i}[H,\rho_t]$ mit Anfangsbedingung $\rho_0 = \rho$. Diese Gleichung heißt *von-Neumann-Gleichung* und beschreibt also äquivalent zum Postulat die Zeitentwicklung im Schrödingerbild.

Analog folgt, dass der zeitabhängige Detektoroperator F_t im Heisenbergbild die eindeutig bestimmte Lösung der *Heisenbergschen Bewegungsgleichung* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t = \mathrm{i}[H,F_t]$ mit Anfangsbedingung $F_0 = F$ ist. Je nach Situation kann es sinnvoll sein, Rechnungen in einem der beiden Bilder durchzuführen.

Damit haben wir nun die grundlegenden Postulate, mit denen die Quantenmechanik physikalische Systeme beschreibt, zusammengestellt. Warum diese – auf im Vergleich zur klassischen Physik sehr abstrakter Mathematik basierenden – Postulate so gut zur Beschreibung der Natur funktionieren, ist eine gute Frage – sie tun es jedenfalls.

Natürlich stellt sich an dieser Stelle auch die Frage, wie man zu einem zu beschreibenden System den „richtigen“ Hilbertraum findet, die Dichte- und Detektoroperatoren für konkrete Präparationen bzw. Messungen oder den Hamiltonoperator. Dies ist nicht so leicht zu beantworten, es gibt keine allgemeingültige Vorgehensweise dafür. Allerdings gibt es verschiedene Verfahren, die sich bewährt haben; beispielsweise, um eine klassische (d. h. nicht-quantenmechanische) Theorie zu „quantisieren“, d. h. aus der klassischen Beschreibung eines Systems eine quantenmechanische Theorie zu konstruieren. In späteren Teilen der Reihe werden wir uns vermutlich ein wenig damit beschäftigen.

An dieser Stelle wollen wir uns aber damit begnügen, den allgemeinen Formalismus etwas auszubauen.

Reine Zustände

Wir wollen nun die Menge der Zustände, d. h. der Dichteoperatoren, auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ genauer untersuchen.

Zunächst stellen wir fest, dass jeder eindimensionale Projektor, also $|\psi\rangle\langle\psi|$ für einen normierten Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, ein Dichteoperator ist.

Sind außerdem ρ_1, ρ_2 Dichteoperatoren, so ist auch jede „Mischung“ $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ mit $\lambda \in [0,1]$ ein Dichteoperator, wie man sich direkt überlegen kann. Zu je zwei Dichteoperatoren liegt also immer die ganze Verbindungsstrecke zwischen ihnen auch in der Menge der Dichteoperatoren, d. h. diese Menge ist *konvex.*

Ein reiner Zustand ist ein Dichteoperator, der sich nicht weiter in dieser Form „entmischen“ lässt:

Definition 1.36. Ein *reiner Zustand* ist ein Extremalpunkt der konvexen Menge der Dichteoperatoren, d. h. ein Dichteoperator ρ, der sich *nicht* als Konvexkombination anderer Dichteoperatoren schreiben lässt, der also nicht die Form $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ mit Dichteoperatoren $\rho_1 \neq \rho_2$ und $\lambda \in (0,1)$ hat. Einen nicht-reinen Zustand nennt man auch einen *gemischten Zustand.*

Für die Klassifikation der reinen Zustände gilt ein einfacher, vielleicht überraschender, Satz:

Satz 1.37. *Ein Dichteoperator ρ auf $\mathcal{H}$ ist genau dann ein reiner Zustand, wenn er ein eindimensionaler Projektor ist, also von der Form $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ mit einem normierten $\psi \in \mathcal{H}$.*

Beweis. **„$\Longrightarrow$“:** ρ ist ein Dichteoperator, d. h. positiv und Spurklasse mit Spur 1. Aufgrund der Spurklasseeigenschaft hat er nur Punktspektrum; da er positiv ist, ist er insbesondere selbstadjungiert, also insbesondere normal. Nach dem Spektralsatz für Operatoren mit reinem Punktspektrum gibt es also eine ONB $\{\psi_k : k = 1,\dots,N\} \subset \mathcal{H}$ von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von ρ, und es gilt $\rho = \sum_{k=1}^N \lambda_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ mit den entsprechenden Eigenwerten λ_k (dabei ist $N = \dim\mathcal{H} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$). Außerdem gilt

$$1 = \operatorname{tr}\rho \overset{\text{(Defn.)}}{=} \sum_{l=1}^{n}\langle\psi_l|\rho|\psi_l\rangle = \sum_{l,k=1}^{N}\langle\psi_l|\lambda_k|\psi_k\rangle\underbrace{\langle\psi_k|\psi_l\rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\langle\psi_k|\psi_k\rangle = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k.$$

Da die Eigenwerte λ_k aufgrund der Positivität von ρ nichtnegative ganze Zahlen sind, folgt also insbesondere, dass $\lambda_k \in [0,1]$ $\forall k \in \{1,\dots,N\}$.

Die Zerlegung $\rho = \sum_{k=1}^N \lambda_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ ist also eine Zerlegung von ρ als Konvexkombination anderer Dichteoperatoren. Dies ist jedoch nach Voraussetzung (da ρ rein ist) nicht möglich, außer, wenn nur eines der λ_k nicht 0 – und damit wegen der Normiertheit von $\operatorname{tr}\rho$ gleich 1 – ist. Also ist $\rho = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ mit diesem speziellen k.

„$\Longleftarrow$“: Sei $|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ mit Dichteoperatoren ρ_1, ρ_2 und $\lambda \in (0,1)$.

Dann ist insbesondere $|\psi\rangle\langle\psi| \geq \lambda\rho_1 \geq 0$. Da $|\psi\rangle\langle\psi|$ ein Projektor ist, folgt mit Lemma 1.35, dass

$$\begin{aligned}\lambda\rho_1 &= |\psi\rangle\langle\psi|\lambda\rho_1|\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \lambda\langle\psi, \rho_1\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|,\end{aligned}$$

also $\rho_1 = \langle\psi, \rho_1\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|$. Daraus erhalten wir aber nun durch Bilden der Spur

$$\begin{aligned}1 &= \operatorname{tr}\rho_1 \\ &= \operatorname{tr}(\langle\psi, \rho_1\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= \langle\psi, \rho_1\psi\rangle \operatorname{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= \langle\psi, \rho_1\psi\rangle;\end{aligned}$$

also gilt $\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Analog folgt $\rho_2 = |\psi\rangle\langle\psi|$; $|\psi\rangle\langle\psi|$ lässt sich also nicht entmischen und ist ein reiner Zustand. □

Man kann also reine Zustände auch mit eindimensionalen Unterräumen von $\mathcal{H}$ identifizieren, bzw. mit Vektoren bis auf Multiplikation mit komplexen Zahlen.

Wir haben im ersten Teil des Beweises außerdem gezeigt (bzw. aus dem Spektralsatz gefolgert), dass sich jeder Dichteoperator ρ in der Form $\rho = \sum_{k=1}^{\dim\mathcal{H}} p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ aus reinen Zuständen zusammenmischen lässt mit $p_k \in [0,1], \sum_k p_k = 1$.

Ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ein reiner Zustand und F ein Detektoroperator, so ist die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors F an einem gemäß ρ präparierten System $\operatorname{tr}(\rho F) = \operatorname{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|F) = \operatorname{tr}(\langle\psi|F|\psi\rangle) = \langle\psi|F|\psi\rangle$ (also das Skalarprodukt $\langle\psi, F\psi\rangle$) aufgrund der Zyklizität der Spur.

Untersucht man außerdem die Zeitentwicklung im Schrödingerbild, betrachtet also die Ansprechwahrscheinlichkeit $\operatorname{tr}(\rho_t F)$ mit $\rho_t = U_t\rho U_t^*$, so erhält man für einen reinen Zustand $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, dass $\rho_t = U_t|\psi\rangle\langle\psi|U_t^* = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ mit $\psi_t = U_t\psi = \exp(-\mathrm{i}tH)\psi$; man kann also den zeitabhängigen Dichteoperator als eindimensionalen Projektor schreiben auf den vom zeitabhängigen, normierten Vektor ψ_t aufgespannten Unterraum. Dieses $\psi_t = \exp(-\mathrm{i}tH)\psi, t \in \mathbb{R}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = H\psi_t$$

mit Anfangsbedingung $\psi_0 = \psi$; da die Gleichung eine gewöhnliche lineare DGl. ist, ist diese Lösung eindeutig. Diese Gleichung ist die sogenannte *Schrödingergleichung*, die also die Zeitentwicklung von reinen Zuständen im Schrödingerbild beschreibt.

Observablen

In den Postulaten war aufgrund der statistischen Interpretation nur von ja-nein-Messungen die Rede. Da im Allgemeinen kompliziertere Messergebnisse möglich sind, wollen wir uns nun überlegen, wie man komplexere Messungen auf ja-nein-Messungen zurückführen kann.

Betrachten wir dazu eine Messung, deren mögliche Ergebnisse die Elemente einer Menge X sind. Dann können wir für Teilmengen $A \subset X$ die ja-nein-Frage stellen, ob das Messergebnis in A liegt; zu dieser ja-nein-Messung „Führe die Messung durch und prüfe, ob das Ergebnis in A liegt“ gibt es also nach dem Postulat einen Detektoroperator $F(A)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Messwert an einem bezüglich ρ präparierten System in A liegt, ist dann also $\operatorname{tr}(\rho F(A))$.

Sind $A, B \subset X$ disjunkt, so entspricht $F(A \cup B)$ der Frage „Liegt der Messwert in A oder in B?“; da die Wahrscheinlichkeit dafür gerade die Summe der Wahrscheinlichkeiten für ein Messergebnis in A und ein Messergebnis in B ist, gilt also $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$.

Da X gerade die Menge der möglichen Messergebnisse war, liegt jedes Messergebnis in X; es muss also $F(X) = \mathbb{1}$ gelten.

Diese Ideen motivieren die folgenden Definitionen.

Definition 1.38. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein *positiv-operatorwertiges Maß* (kurz *POVM*, “positive operator valued measure”) auf $(X, \mathcal{A})$ bzgl. $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $F(A) \geq 0 \;\forall A \in \mathcal{A}$ (der Wertebereich sind die positiven Operatoren auf $\mathcal{H}$)

(ii) $F(\emptyset) = 0$

(iii) $F(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} F(A_k)$ in der starken Operatortopologie (also bzgl. der Anwendung auf Vektoren) für alle Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen $A_k \in \mathcal{A}$ (σ-Additivität)

Definition 1.39. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine *Observable* auf $\mathcal{H}$ mit Werten in X ist ein POVM F auf $(X, \mathcal{A})$ bzgl. $\mathcal{H}$, das normiert ist, d. h. $F(X) = \mathbb{1}$.

Die so definierten Observablen formalisieren die obigen Ideen zu allgemeinen Messungen; allgemeineren Messverfahren als ja-nein-Messungen entsprechen in der quantenmechanischen Beschreibung also Observablen.

Ist F eine Observable, so ist für jeden Dichteoperator ρ durch $\mathcal{A} \ni A \mapsto \operatorname{tr}(\rho F(A))$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben, das also angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit an gemäß ρ präparierten Systemen der mit F gemessene Wert in A liegt.

Ist die Wertemenge X eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, so lässt sich der Erwartungswert des Messergebnisses definieren; er ist dann das Integral der Identitätsfunktion bzgl. dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes, also $\int_X x\mathrm{d}\mu(x)$ mit $\mu = \operatorname{tr}(\rho F(\cdot))$. Definiert man den Operator $E_F := \int_X x\mathrm{d}F(x)$ (wobei das Integral analog zu Integralen bzgl. „normaler“ Maße definiert wird), lässt sich damit der Erwartungswert der Observable F im Zustand ρ schreiben als $\operatorname{tr}(\rho E_F)$.

Ist allgemeiner $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine (messbare) Funktion, mit der die Messwerte „weiterverarbeitet“ werden, so ist der Erwartungswert der „weiterverarbeiteten“ Messwerte gegeben durch $\operatorname{tr}(\rho E_{F,f})$ mit $E_{F,f} = \int_X f(x)\mathrm{d}F(x)$. Beispielsweise erhält man im Fall $X \subset \mathbb{C}$ den Erwartungswert des Quadrats der Messwerte als $\operatorname{tr}(\rho E)$ mit $E = \int_X x^2\mathrm{d}F(x)$.

Eine gewisse Vereinfachung ergibt sich bei sogenannten projektionswertigen Observablen.

Definition 1.40. Eine Observable F heißt *projektionswertig*, wenn alle Operatoren $F(A), A \in \mathcal{A}$ Projektoren (also Orthogonalprojektionen) sind, also $F(A)^2 = F(A)$.

Lemma 1.41. *Ist F eine projektionswertige Observable auf $\mathcal{H}$ mit Werten in X und $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so ist der Operator $E_{F,f} := \int_X f(x)\mathrm{d}F(x)$ unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator, der mit einer Funktion multipliziert, deren Funktionswerte die Funktionswerte von f sind. Ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine weitere messbare Funktion, so gilt im Funktionalkalkül $g(E_{F,f}) = \int_X g(f(x))\mathrm{d}F(x)$.*

Beweis (Skizze). Je zwei Projektoren auf $\mathcal{H}$ kommutieren miteinander. Da Projektoren außerdem positiv und damit insbesondere normal sind, gibt es nach dem Spektralsatz einen L^2-Raum $\tilde{\mathcal{H}}$ und einen unitären Operator $U\colon \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$, sodass alle Projektoren auf $\mathcal{H}$ unter U unitär äquivalent zu Multiplikationsoperatoren sind. Die Funktionen, mit denen diese Operatoren multiplizieren, haben als Funktionswerte nur 0 oder 1 (man kann sich leicht überlegen, dass das Spektrum eines Projektors höchstens 0 und 1 enthalten kann, indem man benutzt, dass $\mathcal{H}$ in Kern und Bild zerfällt).

Insbesondere sind also alle Operatoren $F(A)$ unter U äquivalent zu Multiplikationsoperatoren, die mit $\{0,1\}$-wertigen Funktionen multiplizieren. Da bei der Definition des Integrals $\int_X f(x)\mathrm{d}F(x)$ im Wesentlichen Operatoren der Form $F(A)$ mit Funktionswerten von f multipliziert und anschließend addiert werden, folgt der erste Teil der Behauptung.

Bei der Definition von $g(E_{F,f})$ im Funktionalkalkül wird auf die Werte der Funktion, mit der $U^* E_{F,f} U$ multipliziert, jeweils noch g angewendet; dies ist also nach den vorherigen Überlegungen gerade der Operator, den man als Integral $\int_X g(f(x))\mathrm{d}F(x)$ erhält. □

Hat man eine Observable F mit Werten in $X \subset \mathbb{C}$, die projektionswertig ist, so kann man aus dem „Erwartungswertoperator“ $E_F = \int_X x\mathrm{d}F(x)$ also auch alle weiteren Operatoren der Form $\int_X g(x)\mathrm{d}F(x)$ über den Funktionalkalkül als $g(E_F)$ erhalten; wenn man also den Erwartungswertoperator einer solchen Observable kennt, so kann man damit über den Funktionalkalkül die Erwartungswerte für alle Funktionen der Messwerte bestimmen. Beispielsweise erhält man also den Erwartungswert des Quadrats der Messwerte einfach als $\mathrm{tr}(\rho E_F^2)$.

Man kann in diesem Fall sogar die gesamte Observable F aus dem Erwartungswertoperator rekonstruieren, denn es gilt jeweils $F(A) = \int_X \chi_A(x)\mathrm{d}F(x) = \chi_A(E_F)$.

Ist als weiterer Spezialfall F projektionswertig und hat als Messergebnisse reelle Zahlen, also $X \subset \mathbb{R}$, so ist nach dem obigen Lemma der Erwartungswertoperator E_F unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator, der mit einer reellwertigen Funktion multipliziert; d. h. E_F ist selbstadjungiert. Umgekehrt erhält man aus jedem selbstadjungierten Operator E über $F(A) := \chi_A(E)$ (im Funktionalkalkül) eine projektionswertige Observable F mit Werten in $\mathbb{R}$, deren Erwartungswertoperator E ist.

Man kann also projektionswertige Observablen, die reelle Zahlen als Messergebnisse liefern, mit selbstadjungierten Operatoren identifizieren.

Keine Postulate

Es gibt einige Aussagen, die oft als Postulate der Quantenmechanik mit einbezogen werden, allerdings in gewisser Weise „einschränkend“, bei modernen Anwendungen problematisch oder bezüglich ihrer Interpretation zweifelhaft sind. Im hier eingeführten, statistisch interpretierten Aufbau sind sie allerdings auch nicht nötig, weshalb wir sie nicht zu den Postulaten gezählt haben. Dennoch wollen wir sie uns kurz ansehen.

Zunächst beschränkt man sich in den Postulaten oft auf *reine Zustände* (d. h. auf normierte Vektoren) und führt die allgemeineren Dichteoperatoren als „Hilfsmittel“ ein, um Situationen zu beschreiben, in denen man die „tatsächliche“ Präparation des Systems „nicht genau kennt“.

In gewisser Weise mag die zwar naheliegend erscheinen, da für einen allgemeinen, möglicherweise gemischten Dichteoperator $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ die Ansprechwahrscheinlichkeit eines Detektors $\mathrm{tr}(\rho F) = \sum_k p_k \langle\psi_k|F|\psi_k\rangle$ ist und man also ρ als eine Präparation verstehen kann, in der verschiedene reine Zustände $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ mit jeweiligen Wahrscheinlichkeiten p_k vorkommen können.

Allerdings stößt diese Sichtweise bei zusammengesetzten Systemen an ihre Grenzen: Wenn ein zusammengesetztes System in einem *reinen* Zustand ist, so sind i. Allg. die Teilsysteme in *gemischten* Zuständen. Insofern hat das Vorliegen eines gemischten Zustands nichts mit einer „Unwissenheit“ über die Präparation zu tun.

Eine weitere Einschränkung wird oft bei den *Observablen* gemacht. Diese werden dann einfach als *selbstadjungierte Operatoren* definiert, entsprechen also in „unserer Sprache“ – wie oben beschrieben – den projektionswertigen Observablen mit reellen Messergebnissen.

Dies ist einerseits einschränkend, da nur reelle Zahlen als Messergebnisse zugelassen werden, obwohl man sich allgemeine Messungen mit nahezu beliebigen Ergebnissen vorstellen kann. Andererseits ergibt sich der oben eingeführte allgemeine Begriff von Observablen als POVMs auf natürliche Art und Weise aus der statistischen Formulierung mit Detektoroperatoren, und die Einschränkung auf Projektionswertigkeit wäre gewissermaßen „unnötig“.

Außerdem gibt es Fälle, in denen eine Observable nur als POVM existiert, aber nicht als projektionswertige Observable, beispielsweise für Ankunftszeitmessungen; und spätestens bei der Beschreibung von indirekten Messungen – d. h. Messungen, bei denen man das System mit einem „Messsystem“ wechselwirken lässt und dann an diesem Messsystem eine Messung durchführt – muss man POVMs betrachten, da eine indirekte Messung auf dem ursprünglichen System i. Allg. nur als POVM beschreibbar ist, auch bei projektionswertiger Messung am Messsystem.

Das letzte Konzept, das oft als Postulat herangezogen, aber von uns explizit ausgenommen wird, ist der berühmt-berüchtigte *„Kollaps der Wellenfunktion“* bzw. das sogenannte *Projektionspostulat*, welches große Probleme bezüglich seiner Interpretation bereitet. Es besagt, dass nach der Messung einer Observablen (im eingeschränkten Sinne als selbstadjungierter Operator) an einem quantenmechanischen System das System in den Zustand übergehen müsse, der durch den Eigenvektor zum gemessenen Eigenwert der Observable beschrieben wird.

Die Idee dahinter ist, dass eine sofortige Wiederholung der Messung dasselbe Ergebnis liefern solle. Für einen durch einen normierten Eigenvektor ψ einer Observable E, $E\psi = e\psi$, beschriebenen reinen Zustand $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ergibt sich als Erwartungswert der Messgröße der entsprechende Eigenwert $\mathrm{tr}(\rho E) = \langle\psi|E|\psi\rangle = \langle\psi|e|\psi\rangle = e$, sodass diese Forderung durch das Projektionspostulat erfüllt ist.

Allerdings gibt es mehrere Probleme. Zunächst könnte es sein, dass eine Observable entartete Eigenwerte hat, also die Eigenräume mehrdimensional sind. Dies lässt sich recht einfach in das Postulat mit einbauen, indem statt eines Wechsels in einen durch einen Eigenvektor beschriebenen reinen Zustand der Dichteoperator des Systems auf den Eigenraum des Messwerts eingeschränkt wird (sog. *Lüders-Messung*).

Schwerwiegender ist das Problem, dass viele grundlegende Observable – beispielsweise Ort und Impuls, siehe spätere Teile der Reihe – gar keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren haben, sondern nur kontinuierliches Spektrum, sodass sie bei Verwendung des Projektionspostulats nicht als Observablen zulässig wären.

Weitere Probleme ergeben sich bei der Interpretation des „Kollapses“: Wenn eigentlich die Schrödingergleichung bzw. der Zeitentwicklungsoperator die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems für alle Zeiten beschreiben, warum ist das dann bei einer Messung plötzlich nicht mehr der Fall? Noch wichtiger ist die folgende Frage: Was ist eine „Messung“ am System, wann genau findet diese und damit der Kollaps statt? Bei diesem sogenannten „Messproblem“ der Quantenmechanik kommen dann oft Ideen wie die eines „bewussten Beobachtens“ ins Spiel, die in einer objektiven Theorie nichts zu suchen haben sollten.

Wenn man genauer über das Projektionspostulat nachdenkt, bemerkt man, dass man es für eine statistische Interpretation der Theorie tatsächlich gar nicht benötigt: Die Forderung nach demselben Ergebnis bei „sofortiger“ Wiederholung einer Messung klingt zunächst so, als würde sie Reproduzierbarkeit von Messergebnissen garantieren. Jedoch ist mit Reproduzierbarkeit natürlich gemeint, dass bei Wiederholung des *gesamten* Experiments die Ergebnisse reproduzierbar sind, und das bedeutet jeweils eine *neue* Präparation und Messung; nach einer Messung interessiert das konkret untersuchte System meist nicht mehr (beispielsweise detektierte Teilchen).

FEUILLETON

Blind Guardian: Beyond The Red Mirror

Ein gemeinsamer Album-Review

VON MARC ZERWAS UND FLORIAN KRANHOLD

Einem kleinen Jungen obliegt die Aufgabe, zwei Welten vor ihrer sicheren Vernichtung zu bewahren. Er allein, der Auserwählte, kann seine eigene und jene Welt hinter dem Portal retten. Doch anstatt sich seinem Schicksal zu stellen, kehrt er ihm den Rücken und entzieht sich der Verantwortung. So endete 1995 das Album *Imaginations From The Other Side*. Nun, fünf Alben und 20 Jahre später, wird die Geschichte fortgesetzt und die Folgen seines damaligen Handelns sind in beiden Welten, dem „here and now“ und der Fantasywelt *Discordia* spürbar. Und so entbrennt in dem Konzeptalbum *Beyond The Red Mirror* eine geradezu epische Geschichte von fehlgeleiteten Ideologien, spannenden moralischen Konflikten und natürlich Zeitreisen. Allein diese ausgefällte Welt zu erkunden und Theorien über die Handlung aufzustellen lohnt schon den Blick auf das Album, wenn man sich für so etwas begeistern kann.

Doch wie schaut es musikalisch aus? Fünf Jahre haben die Krefelder Power-Metaler um ihren Frontmann HANSI KÜRSCH für ihr neues Werk benötigt und bescheren dem Hörer mit Unterstützung von Orchestern und Chören nun fast 80 Minuten an neuem Material. Um diesem Werk gerecht werden zu können (und weil wir es beide sehr gerne hören), haben wir das Album zu zweit unter die Lupe genommen, wobei Florian es eher einer musiktheoretischen Sicht betrachten wird, während ich (Marc) mich der Materie eher von einem emotionalen und bandhistorischen Standpunkt her nähere.

Dem Review liegt hierbei mit dem (nebenbei extrem edel anmutenden) Earbook die umfangreichste Fassung des Albums vor, welche zwei in die Geschichte integrierte Bonussongs beinhaltet und auf zwei CDs aufgeteilt ist. Diesem stolzen Umfang ist es schließlich auch geschuldet, dass wir uns dieses Mal zunächst auf die ersten sechs Stücke der ersten CD konzentrieren und die zweite CD mitsamt unsern Fazits zu gegebener Zeit nachreichen werden. Doch nun genug der einleitenden Worte, schauen wir nach, was sich tatsächlich hinter dem roten Spiegel verbirgt!

The Ninth Wave

MARC: Der Opener *The Ninth Wave* beginnt mit einem mächtigen Intro. Drei Chöre fusionierten hier zu einem mächtigen Chorus, welcher an Größe und Opulenz alles bisher von der Band geschriebene in den Schatten stellt. Organisch geht der Übergang zur Band vonstatten: Erst Gitarre, dann Gesang und schließlich Schlagzeug. Dabei sind alle Stimmen clever ineinander verwoben und ergibt ein stimmiges Gesamtbild.

Schließlich verebbt der Chor und das eigentliche Lied beginnt. Dabei sind die Strophen sehr abwechslungsreich und stimmungsvoll geschrieben. Hansi und der Chor schlüpfen hierbei in die Rolle von insgesamt fünf Blickwinkeln der Handlung. Dadurch schwankt die Atmosphäre des Songs zwischen düster, aggressiv bis hin zu hymnisch. Dabei fügen sich alle Segmente angenehm zu einem sehr interessanten Mix zusammen und fast nichts wirkt deplatziert oder beliebig. Lediglich an zwei kurzen Stellen dominieren doch sehr seltsame und gar irritierende Synthesizereffekte das Werk und stören die Atmosphäre doch immens.

Doch immer wieder gewinnt der hymnische, fantastische Refrain die Oberhand in dem vor allem der Chor hervorragend zur Geltung kommt. Ist das ganze Stück insgesamt sehr vielseitig, gibt er dem gesamten Lied Struktur und Form. Auch lädt er förmlich zum Mitsingen ein und wird gewiss auch live sehr gut ankommen. Abgerundet wird dieser überzeugende Opener erneut mit dem *Carmina Burana*-artigen Chor, der das Lied schließlich würdig abschließt. Leider umrahmt er nur den Song und ich hätte es schöner gefunden, wenn er im Hintergrund häufiger hätte eingesetzt werden können. Dennoch ein herausragender Start in das Album.

FLORIAN: *The Ninth Wave* beginnt mit einem zunächst zweistimmigen Männerchor, der in einen mehrstimmigen gemischten Chor übergeht; es wird ein rhythmisch repetitives und durch Synkopen sehr individuelles Thema, was anfangs noch zusätzlich durch die Snare gestützt ist, vorgetragen. Nach kurzer Zeit setzt das Schlagzeug zu einer sehr düsteren, aber dennoch ruhigen Begleitung des Chores ein und leitet in einen Teil über, in dem sich der Chor, Hansi, Hansi gegrowlt und schließlich auch mehrstimmiger Hansi abwechseln. Schließlich wird das Schlagzeug noch heftiger und die Harmonien stumpfen weiter ab, fast schon zu banal. Allerdings nicht zu lang; der Refrain folgt gerade noch rechtzeitig. Und der ist hervorragend: Interesante Dur-Moll-Wechsel und mehrstimmiger Gesang sowie trotz der interessanten Harmonien einprägsame Melodien vereinen sich zu einem sehr angenehmen Klang. Schön ist hier auch der dezente Einsatz von Synthesizern. Was vor allem im Kopf bleibt, ist der den Refrain einleitende Schrei „Let This Fire Burn“, der noch öfters zu hören sein wird.

Nach dem Refrain flacht das Lied ein wenig ab, bis schließlich die zweite Bridge den erwartbaren Refrain ankündigt, der, wie schon gesagt, die eigentliche Stärke dieses Stückes ausmacht.

Das Gitarrensolo ist etwas einfallslos. Es kopiert im Wesentlichen die Harmonien der bereits bekannten Passagen und hat trotz zweistimmiger Polyphonie keine erfrischenden neuen melodischen Inputs.

Danach wiederholen sich im Wesentlichen die genannten Teile und außerhalb des Refrains kommt wenig Bemerkenswertes dazu. Man wartet wieder auf Hansis „Let This Fire Burn“ und erfreut sich alsdann des schönen Refrains.

Abgeschlossen wird das Stück durch eine Wiederholung des anfänglichen Chorteils, sodass insgesamt ein schöner Kreis geschlossen wird.

Twilight Of The Gods

Marc: Das nächste Stück hingegen flacht nach diesem großartigen Intro etwas ab. Es ist nicht schlecht, in Teilen sogar sehr überzeugend. Besonders der sehr „oldschoolige“ Beginn und der erneut schöne und epische Refrain fesseln durchaus, doch leider kann das restliche Lied mit dieser Qualität nicht ganz Schritt halten.

Der Song ist als letztes entstanden und mehr oder weniger aus nicht verwendeten Fragmenten zusammengestückelt. Und genauso fühlt es sich stellenweise auch an. Alle Elemente der durchaus vielseitigen Strophen sind für sich genommen ganz gut und schlüssig, doch harmonieren sie nicht mit den Restlichen. Das gesamte Lied ist zu fragmentiert und sprunghaft um wirklich überzeugen zu können.

Dennoch hatte ich diese im Vorfeld veröffentlichte Single noch Monate nach ihrer Veröffentlichung auf den Lippen. Es hat schließlich doch eine gewisse Qualität durch den sehr einprägsamen Refrain und macht daher auch viel Spaß zu hören. Erneut stellt das Ende des Stückes einen angenehmen, diesmal etwas rauen Zirkelschluss dar und führt dieses doch ganz gute Stück zu einem runden Abschluss.

Florian: Dieses Lied beginnt zugegebenermaßen ziemlich einfallslos; sowohl die Gitarre zu Beginn als auch schließlich der Einsatz des Sängers klingen etwas übertrieben brachial; erst der chorale Gegenpart macht es ein bisschen interessant. Harmonisch beschränkt sich das Thema auf eine andalusische Kadenz; das Schlagzeug ist etwas überambitioniert.

Der Refrain hingegen ist – mal wieder – ziemlich gut; und wie immer bei Bling Guardian sind die Dur-Moll-Wechsel zu loben. Die Bridge lässt ganz galant harmonisch Moll anklingen; allerdings ist der Bass ein wenig einfallslos und beschränkt sich im Wesentlichen auf Achtelrepetitionen. Das Ende des Refrains auf der Dominantparallele als Überleitung zur Strophenwiederholung hingegen ist wieder gelungen.

Das Gitarrensolo nach dem zweiten Refrain ist melodisch deutlich besser als das von *The Ninth Wave* und wagt auch einige nette harmonische Spielereien.

Am Ende wiederholt sich das Vorspiel, das hier allerdings nach dem bereits gehörten etwas logischer als noch zu Beginn erscheint und ein schlüssiges Ende darstellt.

Prophecies

Marc: *Prophecies* ist schließlich das erste Lied, welches mit Ausnahme seines Intros eine sehr konsistente, stimmungsvolle Atmosphäre aufbieten kann. Überzeugten vorangegangene Lieder durch Abwechslung in den Strophen, springt dieses Stück weniger in den vorherrschenden Emotionen. Nur der Beginn, welcher trotz seiner Qualität etwas für sich steht, fällt hier etwas heraus und es braucht knapp 20 Sekunden, bis man im eigentlichen Lied angekommen ist.

Fortan schafft es dieses auf eine sehr elegante Weise, die musikalische Härte mit schönen Melodiebögen zu verquicken. Dabei setzt es pausenlos Highlights und kann über die gesamte Länge begeistern. Lediglich das etwas monotone Gitarrensolo fällt leicht ab, doch trübt es den Gesamteindruck nur geringfügig, da es nicht mit der Atmosphäre bricht und folglich unauffälliger ist, als es vielleicht beabsichtig wurde. Der Refrain hingegen ist erneut sehr einprägsam, aber etwas simpel gehalten (was für eventuelle Liveauftritte durchaus praktisch ist).

Besonders positiv hingegen fällt das Finale des Liedes auf, welches das Tempo noch einmal steigern kann. Rasch baut sich hier etwas auf, welches zum Rest des Liedes passt, hingegen aber druckvoller und prägnanter wirkt. Doch endet diese Passage ebenso schnell wie sie überraschend kam, lässt den Hörer jedoch sehr zufrieden und überzeugt zurück und wertet damit ein ohnehin schon gutes Lied nochmals auf.

Florian: Hier werden wir mit einem etwas gewöhnungsbedürftig ruhigem Intro überrascht, dessen erste Sekunden leider wenig mit dem Rest des Liedes zu tun haben. Alsdann, nach einem abrupten Schlagzeugeinsatz, entsteht eine ganz schöne Situation in der Strophe, in der die Hauptstimme hervorragend in den mehrstimmigen Gesang eigebettet ist und in der sich einige Finessen, etwa das düstere „We shall overcome“ sowie ein Quartvorhalt mit Wechselnote finden.

Der Übergang und die gesamte atmosphärische Anlage ist fließend, beinahe zu fließend, denn der Refrain sticht, verglichen mit den anderen Liedern, nur marginal hevor. Er zeichnet sich dadurch aus, dass er rhythmisch stumpfer ud dadurch harmonisch prägnanter ist, und zerfällt in zwei Teile: Im ersten haben wir einen Wechselgesang zwischen Hauptstimme und Chor; im zweiten beide gleichzeitig, obschon die Hauptstimme wieder nur eingebettet, nicht verschmolzen mit dem Chor ist, sodass durch das Hervorstechen einer Stimme ein schöner Effekt entsteht.

Die „zweite Strophe“, wenn man sie so nennen mag, unterscheidet sich von der ersten – vor allem durch den stark erhöhten Einsatz von Bass und Powerchords sowie sehr repetitiv einprägsamen Triolen in den Tiefen.

Das Gitarrensolo ist mal wieder sehr banal und beschränkt sich auf ein paar Terzen.

Das Ende ist überraschend, stellt es doch nochmal etwas völlig Neues dar. Es ist sehr pompös gehalten und erreicht seine Einprägsamkeit im Wesentlichen durch ein – wieder sehr repetitives – Bourrée-Motiv im mehrstimmigen Gesang. Das Ende ist unerwartet, aber dennoch kunstvoll.

At The Edge of Time

Marc: Mit *At the Edge of Time* nähert sich das Album schließlich dem großen Höhepunkt der ersten Hälfte. Das mystische Intro und der eventuell sanfte Beginn mag den geneigten Hörer auf eine falsche Fährte führen, denn anstatt eines ruhigen Stückes haben wir es hier mit einem orchestralen und kompositorischen Meisterwerk zu tun.

Zum ersten Mal wurde bei den Barden das Orchester zuerst aufgenommen und die Band orientierte sich beim Einspielen an deren Tempo und nicht umgekehrt. Das Ergebnis ist ein beeindruckendes musikalisches Feuerwerk in dem mal Band, mal Orchester und Chor im Vordergrund steht. Dabei schwankt auch Tempo und Lautstärke in einem Maße, wie es sonst nur von klassischen Werken vertraut ist

Erneut ist der Refrain des Stückes erwähnenswert, hebt er sich doch etwas vom der ihm umgebenden Opulenzdemonstration ab. So tritt der Chor hier sehr exponiert auf fügt dem Stück eine gewisse Klarheit hinzu, welche anderweitig in diesem großen musikalischen Wettstreit der stilistischen Einflüsse gefehlt hätte. Erstaunlicherweise ist mir der Refrain beim ersten hören fast gar nicht aufgefallen, so gekonnt wird auf ihn hingearbeitet, dass er trotz seiner besonderen Stellung nie unangebracht dazwischenfunkt. Tatsächlich lässt sich das Stück am ehesten mit der Barden bisher größtes Werk *And Than There Was Silence* vergleichen, welches ähnliche Strukturen auf über 14 Minuten aufweisen kann und vielleicht noch eine Spur großartiger daherkommt.

Man könnte nun gewiss unzählige Absätze mit musiktheoretischen Winkelzüge und kleinen Feinheiten verfassen, welche sich zweifellos in diesem Schmankerl für den Gehörgang verbergen, doch überlasse ich dies meinem in solchen Belangen wesentlich kompetenteren Co-Autor.

Das großartige Finale dieses Meisterwerkes möchte ich jedoch zum Schluss noch gesondert hervorheben. Es handelt sich um einen wichtigen Wendepunkt der Handlung des Albums und stellt eine folgenträchtige Entscheidung für den Protagonisten dar. Dies erfordert natürlich ein gesondert hervorgehobenes Finale. Und jenes ist schlicht und ergreifend das größte und epischste, was ich je von dieser Band gehört habe, so genial steigert sich Hansi, Orchester und Chor zu einem geradezu extasischem Schluss, welcher einen fast sprachlos zurücklässt.

Florian: Auch auf die Gefahr hin, das Gleiche wie Marc zu schreiben: Das Lied ist durchaus furchtbar einfallsreich und ästhetisch. Es beginnt sehr geheimnisvoll, wobei im Intro vor allem ein Glockenspielmotiv aus drei gleichen Achtel (zweite betont) hervorsticht. Erstaunlicherweise schafft es Blind Guardian, beim Einsatz von Gesang und Gitarre, die anfängliche geheimnisvolle Atmosphäre zu bewahren, was musikalisch durchaus nichttrivial ist.

Beim Übergang zur Strophe geht von dieser Atmosphäre leider einiges verloren, aber gut, irgendwo muss das Lied ja auch hin. Stattdessen bietet sich uns eine neue Situation; wir befinden uns in einem hymnisch bis bedrohlich wirkenden $^3/_8$-Takt und werden wieder mit Mehrstimmigkeit verwöhnt. Dabei ist die Steigerung innerhalb der Strophe sehr fließend und es tauchen interessante chromatische Rückungen auf.

Unter arrangementsspezifischen Gesichtspunkten ist der Refrain freilich grandios. Wir haben deutlich lautere Streicher als bisher, aber dennoch so gesetzt, dass sie sich gut ins Gesamtbild fügen. Außerdem sind (erstmalig?) Blechbläser zu hören, sehr hohe Trompeten, die auch in den Folgepassagen dieses Stückes immer wieder zu hören sind und dem Ganzen eine bewundernswerte Opulenz verleihen. Der Basedrum und möglicherweise auch noch einigen anderen Perkussionskomponenten ist ein außergewöhnlich starker Hall hinzugefügt, der die Gratwanderung zwischen Hymnizität und Bedrohlichkeit gekonnt unterstreicht.

Die Folgepassagen lassen sich unter das Leitmotiv „ganz viele Ideen, gut umgesetzt, aber teilweise leider nur dürftig verknüpft“ zusammenfassen. Wir haben sehr kreative Chorpassagen; eine artikulativ bemerkenswerte Kombination zwischen saftem Chorklang und – gleichtzeitig! – aggressivem Hansi, der sich so gar nicht in den Klang einfügen will und dem Ganzen somit einen erstaunlichen Kontrast verleiht.

Das einzige kategorische Manko des Liedes sehe ich in der tontechnischen Abmischung der Basslagen. Das Arrangement bringt es mit sich, zwischen den Refrains sowie auch einigen Soli auf der einen Seite und den Vokalpassagen und Bridges auf der anderen Seite einen großen Unterschied in der Instrumentierung zu machen. Das hat zur Folge, dass die Tiefen in letzterem im Vergleich zu ersteren sehr schmal und der Gesamtklang an diesen Stellen sehr leer wirkt – was er natürlich de facto nicht ist. Natürlich könnte man einwenden, auch in klassischen Werken gebe es Passagen mit und welche ohne Celli und Kontrabässe, allerdings versuchen letztere dann nicht gleichsam weniger hymnisch, aber dennoch hart zu sein.

Das Ende ist gekonnt, wir finden einen sehr guten Orchestersatz, der phasenweise eine rhythmische Eigenständigkeit der Bläser und viele andere Facetten bietet. Der krönende Abschluss ist ein herrliches Crescendo in den Bläsern sowie eine arpeggiert überwundene Quarte zum Grundton (Querflöten?).

Ashes of Eternity

Marc: Anstatt den Versuch zu wagen, den Vorgänger in Opulenz und Größe zu toppen, geht *Ashes of Eternity* einen anderen, ziemlich cleveren Weg. Es beginnt wieder sehr direkt und metallastig wie *Twilight of the Gods* und erzeugt damit einen angenehmen Kontrast zum vorangegangen Werk. Der Riff zu Beginn ist zudem eine Anspielung an das Lied *Fly* vom Album *A Twist in The Myth*. Über das gesamte Album hinweg verstecken sich mehrere solcher kleinen Zitate und sind aufgrund ihres dezenten Einsatzes ein hübscher Fanservice.

Seine eigentlichen Qualitäten offenbart das Stück aber erst, nachdem der Übergang zum eigentlichen Lied vollzogen ist, denn erneut steht das Intro etwas für sich. Das Stück überzeugt durch einen melodischen Refrain, welcher sehr harmonisch in die umschließenden Strophen eingebettet ist. Das gesamte Stück ist im Grunde genommen sehr solide und überzeugend geschrieben und gibt sich fast gar keine Blöße. Wunderbar stimmungsvoll fügen sich alle Abschnitte zusammen und es ist vielleicht der homogenste Track des bisherigen Albums.

Das einzige, was dem Stück eventuell vorzuwerfen ist, ist der Umstand, dass ihm wirklich große Highlights fehlen: So ist der Refrain zwar sehr galant integriert, bietet aber weniger den „guardianschen“ Ohrwurmcharakter. Und auch sonst bleibt weniger im Gedächtnis als bei den vorangegangenen Stücken. So ist es in weiten Teilen ein durchweg gutes Stück, welches beim Hören wahnsinnig viel Spaß macht, in der Rückschau aber etwas unauffällig daherkommt. Leider ist auch das Ende des Stückes etwas plötzlich und nach den tollen vorherigen Abschlüssen eine kleine Enttäuschung.

Florian: Ginge man nur nach Quantifikation der Argumente, also der Beantwortung der Frage nach, wie viele positive und wie viele negative Anmerkungen zu den entsprechenden Stücken ich habe, so sähe *Ashes of Eternity* ziemlich gut aus, wie wir gleich merken werden.

Das ist in den ersten Takten noch nicht so offenkundig: Das Stück beginnt sehr hart und brachial, beinahe strukturlos und insgesamt ganz sonderbar. Die Legitimation erhält das Intro a posteriori durch die nun folgende Strophe und den Refrain. Die Strophe ist trotz der beibehaltenen Härte sehr harmonisch und durch Hansi ausgesprochen kraftvoll. Die choralen Einwürfe sind elegant und die sukzessive dramatische Steigerung hin zur Zwischendominante für den Refrain ist gelungen. Man sollte außerdem bemerken, dass kurz vor dem Refrain ein gewolltes rhythmisches „Chaos“ durch die synkopierten Pseudotriolen (zweimal punktierte Achtel und eine richtige Achtel) entsteht.

Im Refrain schließlich werden diese Pseudotriolen auf die banalst denkbare Weise kontrastiert: Durch stampfende Viertel. Allerdings vermag es Blind Guardian, durch geschickt eingesetzte Choreinwürfe und intelligent ausgepfeilte Harmonien, die Banalität nicht in Stumpfsinnigkeit abgleiten zu lassen.

Sehr schön ist im Folgenden der Kontrast zwischen den unmittelbar auf den Refrain folgenden Harmonien, die einen durchaus beruhigenden Charakter haben, und dem, was sich im Anschluss wieder zu einer Vorbereitung der Zwischendominante aufbaut. Hier lässt die Gitarre mit einigen Terzen im Glissando aufmerken, die ziemlich trefflich eingesetzt sind.

Auch das Gitarrensolo ist ganz erquicklich, da es neue Impulse gibt und einen guten Kontrast zum Gesang setzt. Allerdings stören in diesen Abschnitten die repetitiven Basspassagen, die man auf den Refrain hätte beschränken sollen.

Der Schlussteil ist etwas außergewöhnlich; ich muss gestehen, dass ich bis zwei Takte vor Ende des Liedes der Auffassung war, es folge ein neuer Mitteilteil. Wir finden hier einen schönen Wechselgesang und viele neue Elemente, aber urplötzlich ist das Lied vorbei. Das ist etwas schade.

Distant Memories

Marc: Die folgende Halbballade erbt nun die Stärken es letzten Stückes. Es ist erneut sehr harmonisch und durchweg überzeugend geschrieben. Mit einer Ausnahme, denn es beginnt mit einem albernen, ja geradezu bescheuerten Gitarrenspiel, welches dann aber überraschenderweise sehr harmonisch zu der getragenen Grundstimmung des Liedes überzugehen vermag.

Besonders gefällt mir, dass Hansi erstmals wirklich über weite Strecken des Liedes exponiert im Vordergrund steht und seinem Gesangstalent freien Lauf gewährt wird. Neben den zahlreichen getragenen Passagen des Liedes macht besonders der Kontrast zu den etwas druckvollen Bestandteilen den Reiz des Liedes aus.

Schlicht hervorragend geschrieben schließt es die erste Hälfte des Albums mit einer stimmungsvollen Melodei zum Schluss. Der Abschluss vermag zwar nicht ganz mit dem von *At the Edge of Time* mitzuhalten, ist aber mehr als angemessen für das Lied und schürt große Erwartungen beim Hörer, welch' Ohrenschmaus die zweite CD bereitstellen wird.

Dabei ist es besonders erstaunlich, dass *Distant Memories* lediglich ein Bonus-Song ist und in einigen Fassungen des Albums nicht enthalten ist, ist es doch solch ein faszinierendes Werk.

Florian: Was ist das? Jazz? Man weiß nicht so wirklich, was die ersten paar Takte Gitarre uns sagen wollen, aber sie werden alsbald durch andere Instrumente abgefangen und in einen trefflichen harmonischen Kontext gesetzt, der erstmalig nicht primär episch oder kraftvoll, sondern vielmehr empfindsam traurig und essentiell dramatisch wirkt. Das Intro wird sehr durch Streicher betont.

Auch der Einsatz von Hi-Hat und Hansi passt sich dieser Grundstimmung gut an und es gelingt der Band, diese Emotion homogen und immanent über das ganze Stück hinwegzutragen. Dennoch ist meines Erachtens die Perkussionssteigerung in der Mitte der Strophe zu flott und abrupt; da hätte man aus den Strophenanfängen, auch mit den grandiosen Portati in den Gitarren, mehr machen können.

Der Refrain, auf den nach der beschriebenen abrupten Steigerung dennoch ganz passabel hingearbeitet wird, zeichnet sich durch langatmige Harmoniebögen, wie man sie eher am Ende elegischer Werke vergleichbar *Octavarium* von Dream Theater erwarten würde, aus. Die grundlegende Traurigkeit ist authentisch und berührt, führt sie doch das vorherige Konzept adäquat fort.

Die Bridge zum zweiten Refrain ist ein bisschen verwunderlich: Dem ersten Teil dieser Bridge fehlt scheinbar der thematische Bezug; er ist teilweise motivisch isoliert. Dies wird in der zweiten Hälfte der Bridge besser gemacht.

Nach dem zweiten Refrain schließlich wechselt es in der Gitarre ein bisschen unerwartet nach Dur. Zwar ist die Arbeit mit Gegenklängen (etwa bei „promised land") konsistent, dennoch für das ansonsten so homogene Stück etwas gewagt.

Das Finale schließlich lässt sich durchaus mit dem von *At The Edge of Time* messen; die Orchestierung durch Streicher und Bläser wirkt sehr episch und das Thema wirkt durch die rhythmische Betonung der jeweiligen 7. und 8. Achtel sehr individuell.

Leben

Positive-Challenge

Sieben Tage zum Glück

VON LOUISA STENZ (Gastbeitrag)

Stress in der Schule, der Uni, auf der Arbeit oder im Privatleben, das sind Dinge, die wohl jeder von uns nur zu gut kennt. Sie begleiten uns fast tagtäglich und ergreifen manchmal regelrecht Besitz von uns. Oft beschäftigen uns diese negativen Aspekte des Lebens so sehr, dass wir keinen Sinn mehr für die schönen Dinge im Leben haben.

Genau dies ist der Grund, warum ich mich dazu entschieden habe, an der „Positive-Challenge“ teilzunehmen. Im Rahmen dieser Challenge wird man dazu aufgerufen, sieben Tage lang täglich drei Dinge zu posten, die einem an diesem Tag Freude bereitet haben. Aufgefordert hierzu wurde ich von einer guten Freundin. Ich hielt diesen Vorschlag nicht nur für eine außergewöhnlich schöne Idee, ich habe es vor allem einmal für mich getan.

Die letzte Zeit meines Lebens war keine einfache für mich. Da meine Oma unter einer Lungenkrankheit leidet, bedarf sie oft der Pflege, Besuche bei Ärzten und in Krankenhäusern sind dabei keine Seltenheit. Dadurch blieb irgendwann immer weniger Zeit für die Uni und somit hat sich dort einiges an Arbeit für mich angehäuft, was zu noch mehr Belastung in meinem Leben führte. Diese Gründe führten dazu, dass ich mich immer weiter von vielen meiner Freunde zurückzog, statt mit ihnen darüber zu reden und so viel es mir immer schwerer, das Positive in meinem eigenen Leben zu sehen.

Als meine Freundin mich dann zu dieser Challenge nominierte, dachte ich mir nur: „Warum nicht? Schaden kann es ja bestimmt nicht.“ Ich muss zugeben, dass es mir an einigen Tagen nicht einfach gefallen ist, drei positive Ereignisse in meinem Alltag zu finden, bis ich eine Sache erkannt habe:

Schönheit und Freude können in den kleinsten, für manche Leute unbedeutendsten Dingen gefunden werden. Es kann die erste Blume im Frühling sein, es kann ein Lied sein, welches man jahrelang nicht mehr gehört hat. Ein guter Film, der einen zum Lachen oder Weinen bringt, ein lustiges Buch und so, so vieles mehr.

Einige der Dinge, die ich im Verlauf dieser einen Woche gepostet habe, mag für diejenigen, die es gelesen haben, von nicht allzu großer Bedeutung sein, doch für mich haben sie in diesem Moment unendlich viel bedeutet. Ganz egal wie traurig oder anstrengend mein Tag auch war, ich habe mich abends hingesetzt und mir die Zeit genommen, und jeden einzelnen Tag habe ich drei Punkte gefunden und jeder einzelne von ihnen hat mich zum Lächeln gebracht.

Ich möchte allen, die davon hören, empfehlen, sich auch dieser Challenge zu stellen. Glaubt mir, nichts ist zu klein oder zu unbedeutend, um euch ein wenig Glück und Freude zu bereiten, auch dann, wenn es Momente in eurem Leben geben sollte, in denen es euch schwer fällt, das Positive zu sehen. Öffnet eure Augen, wenn ihr nach draußen geht, öffnet eure Herzen und versucht die Dinge zu sehen, die kaum ein anderer sieht, denn für euch könnten sie in diesem Moment alles bedeuten.

„Laut Musik gehört und mitgesungen“

„Nom nom Cookies gebacken“

„Etwas mit Robbin gechattet und lustige Ideen ausgetauscht. Ein weiterer Mensch, der mich sehr zum Lachen gebracht hat, danke dafür“

„Heim gekommen, aus den Auto gestiegen und über mir war ein atemberaubender Sternenhimmel“

„Spontan mit Mama ins Theater gefahren und Shakespeares 'Viel Lärm um Nichts' gesehen, Gott war das lustig“

There and Back Again

Teil 10: Leben in Murchison

von Charlotte Mertz und Jannik Buhr

6 Uhr morgens, mein Wecker klingelt. Oder, um präzise zu sein, spielt eine kleine sphärische Melodie, die angeblich beruhigend wirken soll. Charlotte darf noch liegen bleiben; ihre Schichten fangen zumeist später als meine an. Ich öffne die Tür des Wohnwagens und versuche herauszutreten, ohne die Katze hereinzulassen oder auf ihr zu landen. Das gelingt mir nur halb und so drehe ich mich wieder um und hebe Skittles, so heißt er, von der Bettdecke, die natürlich erst einmal die halbe Strecke an seinen Krallen mitgeschleppt wird. Fellknäul absetzen, ins Haus gehen, Kessel anschmeißen und den Teebeutel in die Tasse plumpsen lassen, Haferflocken, Milch, Marmelade, dass Frühstück kann beginnen. Langsam werde ich auch geistig wach, die kühle Luft auf dem kurzen Fußweg zum Café hilft zusätzlich.

Tatsächlich geht der Sommer hier langsam vorüber, längst möchte man es Herbst nennen. „Der Winter naht!“, so das Motto einer der Familien in George R. R. Martins äußerst erfolgreich verfilmter Romanreihe. „Nicht für uns!“, denke ich mir. In weniger als 3 Wochen werden wir mit *Korean Air* wieder in Deutschland landen, wo der Sommer gerade erst beginnt.

Um 7 Uhr beginnt dann für mich die Arbeit, meine Schicht trägt den Buchstaben G für „Grounds“. Das bedeutet, ich bereite alles für den Tag vor, schließe die Türen auf, stelle Schilder, Salz und Pfeffer, Zucker und Süßstoff raus, blase Laub etc. Häufig stelle ich den Mahlgrad der Kaffeemühle noch entsprechend Temperatur und Luftfeuchtigkeit ein, da nicht alle Kollegen ein Gefühl dafür haben oder sich überhaupt dafür interessieren. Ab und an mache ich schon ein paar Kaffees, zumeist zum Mitnehmen für LKW-Fahrer oder Bauarbeiter, und gehe dann wieder den alltäglichen Aufgaben nach. Wäsche aufhängen, Fenster putzen, Spülwasser vorbereiten; alles Dinge, die nun einmal anfallen. Um 9 Uhr beginnt eine weitere Schicht, so dass wir nun 3 Leute im Café (und 2 in der Küche) sind; Zeit für meine 10-Minuten-Pause. Diese nutze ich seit neustem häufig zum Meditieren und fühle mich danach so frisch, als hätte ich gerade erst mit der Arbeit begonnen.

Ab 11 Uhr kommt dann meist auch Charlotte und die Zeit, in der die Mehrzahl der Busse eintrudelt, kann anfangen. Je nachdem, wie geschickt ich mich beim Eintreffen der ersten Reisenden platziere, bleibe ich entweder an der Kaffeemaschine oder an der Kasse hängen. Oder aber ich bringe die Kaffees und Mahlzeiten an die Tische und mache nebenher Milchshakes, Tees, kurzum alles, was die Person an der Kaffeemaschine nicht auch noch machen kann. Welche Option mir davon am besten liegt, hängt vom Tag ab. Manchmal gerate ich beim Kaffemachen in einen richtigen Flow, manchmal bin ich so gut gelaunt, dass ich die grumpigsten Kunden an der Kasse bedienen kann ohne mit der Wimper zu zucken. Manchmal findet man natürlich nicht seine Berufung für den Augenblick oder widmet sich dem anfallenden Geschirr. In den letzten Tagen war es besonders geschäftig, da gefühlt alle Neuseeländer auf dem Weg zu ihren Familien fürs Osterfest im Café vorbeigeschaut hatten, und so liefen wir natürlich auf Hochtouren. Je nach dem persönlichen Energielevel mag man es als stressig oder als aufregend auffassen, in jedem Fall ist es eine wichtige Erfahrung.

Abb. 4.1: (a) Charlotte entdeckt GIMP und Jannik die Welt vom Rücken einer Katze (b) Mo mit seinem Sabber-Eimer (c) Webby erfreut sich am Wasser und Charlotte an ihrer Kamera (d) Skittles (das Fellknäul)

Gegen 3 oder 4 Uhr statte ich auf dem Weg nach Hause noch dem Spielplatz einen Besuch ab, um Parkours zu trainieren und herumzuklettern. Heute fragte mich ein Kind: „Are you a monkey?“, was ich ohne Umschweifen bejahte. „I am a monkey, too!“, sagte sie daraufhin und fing an, Affengeräuche von sich zu geben. Als ihr kleiner Bruder auf etwas kauend ebenfalls dazu kam, fragte sie ihn „Oh, what are you eating? We are monkeys, so what do monkeys eat?“ Daraufhin begann sie, eine Liste mit Nahrungsmitteln aufzuzählen. Als „Bananas“ erst nach „Marmite Sandwich!“ folgte, war mir wieder klar, dass wir noch in Neuseeland sind.

Vom Spielplatz geht es dann aber nach Hause (obwohl ein Zwischenstopp an einem wunderschönen Geländer auch noch drin ist), zu dem ich in der letzten Ausgabe noch gar nicht so viel verraten hatte. Gemeinsam mit mittlerweile 2 weiteren Mädels, die ebenfalls im Café erbeiten, und einem weiteren Mitbewohner sind wir bei Lynne, unserer super netten Kollegin untergekommen. Bei Zeiten kommt also richtige WG-Atmosphäre auf, z. B. wenn ich beim gemeinsamen Singstar-Abend (vermutlich zum ersten Mal in meinem Leben) die Ente (= Amateur) schaffe. Charlottes musikalisches Schaffen bewegt sich da auf einem ganz anderen Level. An einem unserer ersten Tage hatte sie, als ich mit dem Campingkocher unsere Mahlzeit zubereitete, nichtsahnend zum Klang ihrer Ukulele vor sich hin gesungen, als prompt eine Frau uns noch am selben Abend zu sich nach Hause einlud um dem Treffen ihrer Blue-Gras-Band beizuwohnen. Seitdem hatte sie sich noch öfter mit unterschiedlichen Bandmitgliedern und anderen Musikern aus Murchison (die sich ja zum Glück alle kennen) getroffen und auch ein paar Stücke für die Open-Mic-Nights im Pub vorbereitet. Bei dieser Veranstaltung treffen sich Musiker und Musikbegeisterte um mit- und fuereinander zu singen und zu musizieren.

Neben den erwähnten menschlichen Mitbewohnern gibt es noch Skittels (das Fellknäul aus Absatz 1), Jacks (ebenfalls ein Kater, der aber selten da ist) und 3 Hunde. Ursprünglich waren es nur der kleine Webby und der überhaupt nicht kleine Mo (wer Harry Potter gesehen hat und sich an Fang erinnert, hat eine perfekte Beschreibung von Mos Aussehen und Charakter, einschließlich des Sabberns), dann jedoch nahm unser Mitbewohner den Hund eines Kumpels auf und so hat Charlotte viel Freude, diesen zu trainieren.

Zudem gibt es dank Charlotte und ihrer neuen Kamera diese Ausgabe einige sehr schöne Bilder, die ja bekanntlich mehr als tausend Worte sagen. Da es nächsten Monat voraussichtlich außer einem kleinen Text über Flughäfen und einem Resumé (mit Apostroph) nicht mehr viel aus Neuseeland selbst zu berichten gibt, möchte ich mich im Namen von Charlotte und mir bereits ganz herzlich bei euch Lesern bedanken, dass Ihr unsere Reise so aufmerksam mitverfolgt habt! Bis zum nächsten Mal.

Abb. 4.2: (a) Bluegras auf der Open-Mic Night (b) Charlotte lernt Bass (c) Roger mit der Zitter (d) Unterstützung aus Schottland, mit viel Gefühl von Dave

KREATIV

Das Baumhaus

VON ANNA DILGEN (Gastbeitrag)

Foto: OldOnliner – flickr.com (CC BY-NC-ND 2.0)

Ein kalter, eisiger Wind fegte durch die Straßen des kleinen Dorfes, in dem Raphael wohnte. Der Herbst war seit ein paar Tagen eingebrochen und färbte die ersten Blätter gelb. Noch lugte die Sonne durch die grauen Wolken und ließ die Regentropfen auf den Blättern glitzern und funkeln. Im Dorf war es still. Für die meisten Menschen wahrscheinlich zu still, doch Raphael war an die Einsamkeit und Ruhe gewöhnt, die dieser Ort ausstrahlte. Hier auf dem Land war alles noch viel einfacher und langsamer im Vergleich zum tosenden Großstadtleben.
Raphael atmete die frische Luft gierig ein, während er über das Ackerfeld seines Vaters trottete. Die Erde knirschte unter seinen Füßen und der Wind pfiff an seinen Ohren vorbei. Ansonsten war es vollkommen still.

Raphael war auf dem Weg zu Felicitas, er vermutete sie in ihrem Baumhaus, das sie zusammen gebaut hatten. Vor zwei Jahren hatten sie es fertigstellen können. Besonders Felicitas liebte das Baumhaus, manchmal hockte sie stundenlang alleine da, kuschelte sich in ihre Decken, las einen alten Schmöker und trank dabei heißen Kakao.

Auch er hatte häufig mit ihr in der winzigen Hütte gesessen, eng aneinander gekuschelt, einerseits, weil so wenig Platz vorhanden war, andererseits, weil es so viel gemütlicher war. Dann hatten sie aus der kleinen Luke geblickt, von der aus man bis ins nächste Dorf sehen konnte, hatten sich Geschichten erzählt oder ein Nickerchen gemacht.

Das hatte Raphael heute nicht vor. Vorerst jedenfalls nicht. Er musste Felicitas endlich etwas gestehen, das er schon seit sehr langer Zeit mit sich herumtrug. Es quälte ihn, war eine immer schwerer werdende Last, er musste die Ungewissheit endlich loswerden. Seine Schritte beschleunigten sich, bis er rannte. Auf der anderen Seite des Feldes stand die große, mächtige Eiche, die die Dorfgrenze markierte und stolz in den Himmel ragte, obwohl sie tot war und keine Blätter mehr trug. In ihren Ästen thronte das Baumhaus, stabil und schön.

„Feli, hey, bist du da oben? Ich bin's, Raphael!“ Ein blonder Lockenkopf wurde aus der Luke gestreckt und ein breites Lächeln erschien auf Felicitas Gesicht. „Hallo Rahel, schön, dass du da bist. Komm rauf, ich habe Plätzchen aus der Küche stibitzt, ist genug für uns beide da!“ Und schon war ihr Engelsgesicht wieder verschwunden.

Während er die wacklige Baumhausleiter hinaufstieg, sagte er in gespielt genervtem Ton: „Feli, ich hab dir schon tausendmal gesagt, dass du mich nicht Rahel nennen sollst!“ Ein Lachen erklang aus dem Baumhaus. „Hier hört das doch niemand, also reg dich nicht so auf!“ Als er ins Baumhaus kletterte, empfing ihn Felis unnachahmliches Grinsen. „Ich hab dich als sabberndes Kleinkind so genannt, also nenne ich dich auch heute noch so. Rahel, Rahel, Rahel, RAHEL!“ Ihr Grinsen wurde noch breiter und sie lehnte sich instinktiv zurück, da Raphael sie unter anderen Umständen erst einmal durchgekitzelt hätte.

Als sie sein ernstes Gesicht sah, verschwand ihr Grinsen jäh. „Hey Raphael, ist irgendwas nicht in Ordnung?“ Mit schweren Gliedern setzte er sich neben sie auf den Holzboden, der mit Decken ausgelegt war. Mit ausdruckslosen Augen starrte er auf den Boden. Als er nicht antwortete, hörte man Angst in Felicitas Stimme mitschwingen: „Raphael, sag schon, was ist los? Was ist passiert?“

Raphael gab sich einen Ruck und sah Felicitas tief in die Augen. Sie hatte hellblaue, klare Augen wie das Meer und obwohl er noch nie selbst dort gewesen war, wusste er, dass es stimmte. Ihre Haut war blass, überzogen mit einem Hauch von rosa. Und ihre Haare … ihre Haare glänzten in einem engelsgleichen Blond-Ton, sie waren das Schönste, was er je in seinem Leben gesehen hatte.

Alles an ihr war wunderschön.

„Es ist nichts, Liebes, jedenfalls nichts Schlimmes. Im Gegenteil. Ich warte schon unendlich lange darauf, aber es war einfach nie der richtige Zeitpunkt, verstehst du? Ab jetzt wird sich alles ändern, das verspreche ich dir …“

Felicitas runzelte ihre Stirn und schüttelte verwirrt den Kopf. „Raphael, ich verstehe kein einziges Wort! Fang noch mal ganz von vorne an. Also, was willst du mir schon unendlich lange sagen?“

Raphael atmete tief durch. Der Augenblick war gekommen.

„Feli. Ich liebe dich.“ Alles in ihm war angespannt und eine Gänsehaut lief ihm den Rücken hinunter. Was würde sie antworten? Wie würde sie reagieren?

„Ich liebe dich natürlich auch, du Dummkopf. Was willst du mir denn jetzt wirklich sagen? Ich bin dir auch nicht böse, wenn du was angestellt hast, aber rück’ endlich mit der Sprache raus!“, sagte Feli nur und knuffte ihm in die Seite.

„Aber Feli, das wollte ich dir doch sagen. Ich liebe dich! Ich liebe dich!“ Das letzte „Ich liebe dich“ schrie er ihr entgegen. Verstand sie denn nicht, was er ihr sagen wollte?

Felis Gesichtsausdruck zeigte gemischte Gefühle. Verwirrt, aber auch ein wenig beunruhigt und vielleicht sogar ein wenig ängstlich. Sie blieb stumm, was Raphael rasend machte. In seinen Träumen, die er jede Nacht hatte, nahm Feli ihn an dieser Stelle immer in die Arme und küsste ihn zärtlich. Und alles war gut. Was war schiefgelaufen?

„Feli, warum sagst du nichts mehr, verdammt noch mal? Ich liebe dich, hast du das denn immer noch nicht begriffen? Du liebst mich doch auch! Wir sind füreinander bestimmt und das weißt du!“

In ihm brodelte auf einmal kalter Hass auf. Warum saß Feli immer noch wie eine bewegungslose Statue vor ihm? Mit einer plötzlichen Bewegung stürzte er nach vorne und küsste Feli auf den Mund. Er drückte seine Lippen gegen ihre, während sie erschrocken zurücktaumelte. Mit seinen Händen fuhr er durch ihre Engelslocken und küsste sie auf das Haar, die Stirn, die Wangen, den Mund. Ein leises Wimmern drang aus Felicitas’ Kehle.

„Warum tust du das, Raphael?“, fragte sie zitternd, „du bist doch mein Bruder!“

Grüße vom Tellerrand

VON CHARLOTTE MERTZ

Manchmal fällt mir auf, wie unheimlich viel wir gar nicht sehen und nie erfassen koennen. Jeder Mensch, den man kennenlernt, hat sein eigenes Leben geführt, lebt in seiner eigenen Welt, geprägt von unterschiedlichsten Erfahrungen.

Vielleicht hat die Frau da vorne Sorgenfalten und einen stumpfen Blick, weil sie sich jede Nacht in den Schlaf weint. Weil sie vor Jahren ihr Kind abgetrieben hat. Vielleicht mag sie auch gar keine Schokolade und nascht deswegen am liebsten Chips. Ausgiebig. Vielleicht aber auch nicht. Vielleicht hat sie vor Jahren einen Mann geheiratet und erst so langsam, nach Jahren schwieriger Ehe, fällt ihr auf, dass sie sich doch eigentlich eher für Frauen interessiert. Weiß man ja nicht.

Vielleicht hat mich der Mann da auch gerade nur so äußerst unhöflich angefahren und war ganz schlecht drauf, weil er von Schlaflosigkeit geplagt ist. Vielleicht ist er immer so, vielleicht aber nur heute. Kann ja sein, dass er eigentlich ein liebender, geduldiger Mensch ist, aber heute, nur heute, hat er mal wieder zu viel gehabt. Weil er immer so müde ist. Weil er sich nach Anerkennung sehnt. Und weil ihm dann, ausgerechnet heute morgen, auch noch der Hund auf den teuren Wohnzimmerteppich gekackt hat. Vielleicht ist er aber auch immer schlecht drauf. Weil das Leben es nicht gut mit ihm meint. Weiß man ja nicht.

Er weiß ja auch gar nichts von mir. Wie ich mich fühle. Was mich ausmacht. Was ich gerne esse und warum ich mich gerade heute so besonders angegriffen fühle. Viel zu oft bleibe auch ich bei mir, in meiner kleinen Welt, bin angegriffen und verletzt, rege mich auf und bin erschreckend egoistisch. Bedauerlich phantasielos.

Viel öfter sollte ich über den Tellerrand schauen und versuchen, die Größe meines Umfeldes wahrzunehmen. Sollte mehr strahlen. Mehr anerkennen, was andere bringen. Sollte nicht nur bei mir bleiben, sondern versuchen, auch die anderen zu verstehen.

Denn manchmal, wenn ich ganz aufmerksam bin, dann kann mich niemand aus der Ruhe bringen, dann verstehe ich die Sorgen, die Kritik, jedes kleinste Meckern und sehe es nicht mehr als persönliche Anklage. Erst dann kann ich wahrnehmen, wie wahrhaft einzigartig jeder von uns ist.

Rätselecke

Erster Teil

von Jannik Buhr

Viele bekannte Magazine beinhalten auf einer ihrer vielen Seiten eine Art Rätselecke. Seien es Kreuzworträtsel, Sodoku, Logik-Spielchen, alles ist vertreten. Ich beschränke mich hier jedoch auf Rätsel, für die man größtenteils ein wenig nachdenken muss, jedenfalls in den meisten Fällen mehr als für die beiden erstgenannten. Die Lösungen gibt es natürlich nächsten Monat. Als Tipp sei gesagt, dass es nie darum gehen wird, die Formulierung des Rätsels in irgendeiner Weise auszutricksen. Es gibt zu jedem Rätsel eine einwandfrei logische Lösung.

Rätsel 1: 9 Kugeln

Vor Euch liegen 9 exakt identisch aussehende Kugeln, eine der selbigen ist um ein paar Gramm schwerer. Mittels einer sehr einfachen Waage, die tatsächlich nur anzeigt, welche ihrer 2 Waagschalen schwerer ist, sollt Ihr nun herausfinden, welche Kugel aus der Reihe fällt. Mit welcher Methode gelingt Euch dies mit den wenigsten Durchgängen? (Ein Durchgang entspricht einmal Wiegen bzw. eine beliebige Anzahl an Kugeln mit einer beliebigen Anzahl anderer Kugeln vergleichen. Es gibt keine zusätzlichen Gewichte, nur die 9 Kugeln und die Waage.)

Rätsel 2: Die Entscheidung

Ihr befindet euch auf Schatzsuche und gelangt letzten Endes an eine Gabelung des Weges. Laut Eurer Schatzkarte befindet sich der Schatz entweder links oder rechts, der andere Weg führt jedoch in den sicheren Tod. Da Eure Karte an dieser Stelle leider nicht präziser ist, bleibt euch nichts anderes übrig, als einen der beiden Trolle zu fragen, die am Wegesrand gerade ein Lagerfeuer angezündet haben. Leider sind auch hier eure Möglichkeiten begrenzt, genau eine Frage habt Ihr, ein weiteres Wort oder Murmeln und die Trolle sind genervt. Glücklicherweise ist Euch bekannt, dass einer der beiden immer die Wahrheit spricht, der andere jedoch die Unwahrheit. Welcher von beiden nun wer ist, das wisst ihr nicht. Dennoch gibt es eine Frage, die euch vor dem sicheren Tod bewahren kann! Welche ist es?

Ich wünsche euch viel Spaß beim Knobeln!

Wie schreibt man eine Bachelorarbeit (nicht)?

Der Versuch, meinen Ferienalltag auf humorvolle Weise zu beschreiben

von Florian Kranhold

Riemannsche Flächen sind zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeiten mit der Zusatzeigenschaft, dass ihre Kartenwechsel biholomorph ... Moment, eine Metaebene höher: Bachelorarbeiten sind Hausarbeiten mit der Zusatzeigenschaft, dass sie sehr wichtig sind. Üblicherweise schreibt man an ihnen ein Semester und im Idealfall schreibt man nur eine.

Dieser Artikel soll mit seiner Beschreibung des Alltags eines Mathe-Bachelor-Arbeit-Schreibenden zweierlei erreichen: Zum einen ein bisschen informieren und künftigen Studentengenerationen erzählen, wie man hier vorgeht, und zum anderen durch seine zynische und (selbst-)ironische Art unterhalten.

Der Anfang

Aller Anfang ist schwer, und ganz besonders der einer Bachelorarbeit. Zuerst wählt man sich einen Themenbereich (etwa Algebra oder Analysis) und einen Professor – im Idealfall sollten diese beiden Entscheidungen kompatibel sein. Das stellt in der Regel schon eine Hürde dar, aber die wird meistens so überwunden, dass alle zu dem einen Professor gehen, der am beliebtesten ist. Kleiner Tipp also an alle Professoren: Wollen Sie sich Arbeit vom Hals halten, machen Sie sich so unbeliebt, dass niemand bei Ihnen eine Bachelorarbeit schreiben möchte.

Hat man dann also einen Professor und einen passenden Themenbereich gefunden, wird der gute Professor schon irgendetwas ganz Interessantes wissen, was „bisher noch niemand so richtig sauber aufgeschrieben hat“. Für alle, die nach Höherem streben: So wirklich Neues wird man in einer Bachelorarbeit nicht herausfinden können.

Dann beginnt der Professor, zumeist mit sehr viel Begeisterung, von dem speziellen Thema, was ihm vorschwebt, zu erzählen. Dabei ist die Verwendung von Bleistift und Papier nicht ausgeschlossen; dass im Zuge solcher Gespräche auf ihrem Zettel plötzlich diverse mutierte Donuts gezeichnet werden, ist sehr üblich. Das einzige Problem, was sich dabei stellt, ist der Umstand, dass sich die Dichte an Begriffen, die er verwendet und Sie noch nie in Ihrem Leben gehört haben, proportional zur Zeit, die er schon über das Thema erzählt, entwickelt.

Der gute Professor wird Ihnen dann schließlich eine Reihe von Büchern empfehlen, von denen jedes ein Preis-/Leistungsverhältnis von 25 ct pro Seite hat, d. h. ein 200-Seiter kann locker mal 50 € kosten. Zugegebenermaßen: Die Bücher sind dann inhaltlich aber wirklich gut. Leider sind die Bücher so gut, dass alle Studenten diese Bücher aus der Unibibliothek leihen wollen, sodass man früher oder später ums Kaufen der Bücher nicht wirklich drumrum kommt.

Die ersten Wochen

Sind Sie also, auf welche Weise auch immer, an Ihre Literatur gekommen, dann können Sie anfangen, zu arbeiten. Wichtig hierfür sind Lesezeichen, viel (!) Schmierpapier, ein PC, ein Bett, viel (!) Kaffee und die Bereitschaft, mit dem Gefühl, dass Sie ziemlich dämlich sind, klarzukommen. Im Grunde kann man Sie jetzt mit diesen Voraussetzungen für ein Semester einschließen.

Sie werden vermutlich phasenweise arbeiten. Es wird Tage geben, an denen Sie höchstens ein Komma in Ihrem Entwurf – oder das gesamte LaTeX-Layout, aber leider nichts Inhaltliches – ändern, und solche, in denen Sie so viel verstehen, dass Sie den – leider fehlerhaften – Eindruck bekommen, Sie könnten die Arbeit bereits am Folgetag zu Ende schreiben.

Hören Sie nebenbei noch Vorlesungen oder beschäftigen sich anderweitig mit Mathematik, so gewinnen Sie den Eindruck, alles sei jetzt „essentiell wichtig“ für ihre Bachelorarbeit und es finde sich in allem noch etwas „ganz Elementares“, was auch diesen oder jenen Teil Ihrer anzufertigenden Arbeit erklären könnte.

Die korrekte Verwendung von Literatur

Wenn man mal nicht weiter weiß, ist es immer ratsam, zu schauen, ob irgendjemand schon mal das gedacht hat, was Sie gerade denken sollen, denn dann kann man ja schauen, wie das mit dem Denken so bei anderen läuft. Sind die Bücher gut, geben sie erstaunlich oft Antworten auf die Fragen, die Sie sich gerade stellen.

Der Haken: Die Antwort auf die Fragen ist meistens ein Theorem, ein Satz, eine Proposition oder ein Lemma. Nun gut, da müssen Sie durch den Beweis durch; wie sonst sollten Sie wissen, warum das, was Sie wollen, gilt. Hierbei gilt aber grundsätzlich: Es gibt Sachverhalte, bei denen die Autoren lügen! Sie lügen einfach! Und zwar immer dann, wenn sie „es ist leicht ersichtlich, dass“ oder vergleichbare Formulierungen einstreuen.

Auch beliebt ist: „folgt aus Satz $x.y$“ Nun gut, da müssen Sie sich diesen Satz anschauen. Erfreut bemerken Sie, dass der Beweis zu diesem Satz gar nicht so lang wie befürchtet ist, aber dann merken Sie, dass darin auf wenigstens drei weitere Sätze verwiesen wird. Nach und nach wird Ihnen auf eine tiefgreifende und profunde Weise klar, wie sich Herakles mit dieser Hydra gefühlt haben muss, und Sie beneiden ihn ob des Vorteiles, dass bei jenem Ungeheuer jeweils nur zwei Köpfe nachwuchsen.

Gut ist auch, wenn plötzlich mittendrin auf ein anderes Buch verwiesen wird. Das ist etwa so, als kommt noch eine neue Hydra an.

Die Tatsache, dass die meiste Literatur auf Englisch ist, stellt ein erfreulicherweise sehr kleines Problem dar, denn erstens ist die mathematische Fachsprache von ihrer Struktur her gleich und von ihrer Semantik recht intuitiv, wenn man sie mal in der einen oder der anderen Landessprache gelernt hat, und zweitens tauchen gerne so Worte wie „Nullstellensatz“, „Eigenvalue“ oder „Führerdiskriminantenproduktformel“ in englischen Texten auf.

Abschließende Hinweise

Zu guter Letzt noch ein paar gut gemeinte Ratschläge:

Machen Sie sich zu Beginn eine Grobstruktur, wo Sie hinwollen, sonst verrennen Sie sich in Kleinigkeiten, die Sie unnötig aufhalten.

Machen Sie wenigstens noch so viel Nichtmathe nebenher, dass Sie nicht von Ihrem Thema träumen. Ich kann Ihnen aus eigener Erfahrung berichten: Von Mathe zu träumen, macht keinen großen Spaß – und glauben Sie mir; wenn Sie meinen, im Traum etwas bewiesen zu haben, irren Sie in der Regel.

Treffen Sie sich regelmäßig mit Ihrem Professor. Im Idealfall nimmt er sich für Sie hinreichend Zeit und geht auf Ihre Fragen ein. Es kann vor allem sehr ermutigend sein, wenn auch er über Argumentationslücken nachdenken muss. Als Abschluss, und das kann man dann vielleicht nochmal unter Humor verbuchen, schildere ich Ihnen ein typisches Gespräch, das bei diesen Treffen entstehen kann:

Sie: „Wie löse ich das Problem in $x.y.z$ am besten?“

[10 Minuten Stille, Sie und Ihr Professor denken]

Ihr Professor: „Möglicherweise … auf diese oder jene Weise?“
Sie: „Das habe ich mir schon überlegt, aber das geht aus diesen oder jenen Gründen nicht.“

[10 Minuten Stille]

Sie: „Möglicherweise, wenn wir den Satz von xy verwenden?“
Ihr Professor: „Dazu müssten wir noch x und y gezeigt haben, was nicht gegeben ist.“

[10 Minuten Stille]

Ihr Professor: „Das scheint mir gar nicht so einfach zu sein, was Sie da fragen.“