Neologismus

Ausgabe 03/2014

Foto: Lukas Heimann

Abfliegen von Wegpunkten ohne absolutes Ortungssystem durch einen Quadrokopter – S. 8

Foto: Tobias Frangen

Mathematiker im Schwarzwald – S. 17

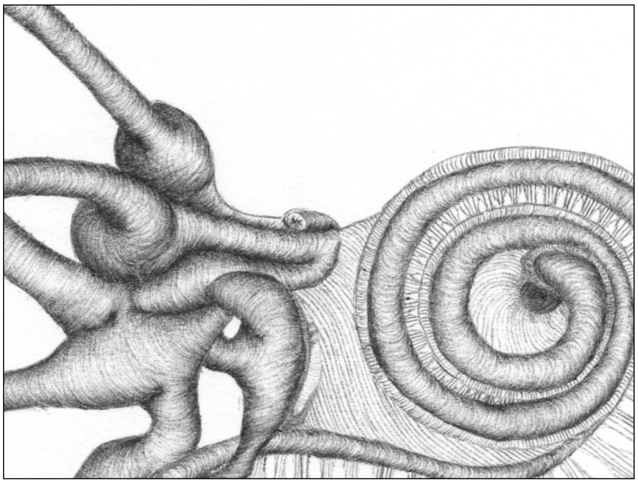


Bild: Danielle Cross

Cochlea – S. 23

Vorwort

Vorwort zur Jubiläumsausgabe

Liebe Leserin, lieber Leser,

die Ihnen hier vorliegende Ausgabe des Neologismus ist eine Besondere: Vor genau einem Jahr gab es die erste.

Mit Ausnahme des Dezembers haben wir also seit einem Jahr monatlich eine neue Ausgabe unserer Zeitschrift herausgegeben und uns darin mit unterschiedlichsten Themen befasst: Von langen philosophischen Aufsätzen und technischen Instruktionen über eine nun vollendete neunteilige Kolumne, welche das Internatsleben schildert, bis hin zu Zeichnungen, Gedichten und Kompositionen hat sich ein großes Spektrum unterschiedlicher wissenschaftlicher und künstlerischer Erzeugnisse angesammelt.

Die monatliche redaktionelle Arbeit hat uns Autoren bisher sehr viel Freude bereitet. In diesem Sinne freuen wir uns auf die Gestaltung der kommenden Ausgaben und hoffen, dass Sie unserem Magazin auch weiterhin treu bleiben.

Mit freundlichen Grüßen

Florian Kranhold,
Chefredakteur,

Tübingen, der 31. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Natur- und Formalwissenschaft

Sei Epsilon kleiner Null …

Teil 4: Abbildungen

von Florian Kranhold

Im letzten Monat haben wir uns mit Relationen beschäftigt.[1] Wir wollen diesmal eine besondere Klasse solcher Relationen untersuchen. Lassen Sie mich versuchen, dies praktisch zu motivieren:

Sei A die Menge aller Waren, die man in einem Supermarkt Ihrer Wahl kaufen kann. Interessant ist natürlich, wie viel diese Waren kosten. Lassen Sie uns dafür der Einfachheit halber alles in Centbeträgen angeben, dann umgehen wir die lästigen Kommazahlen.

Gesucht ist also eine Relation zwischen der Menge A und der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, also $\sim \subseteq A \times \mathbb{N}$. Für $a \in A$ und $p \in \mathbb{N}$ soll also gelten:

$$a \sim p :\Leftrightarrow \text{„}a \text{ hat den Preis } p\text{."}$$

Wir bemerken schnell, dass diese Relation in zweierlei Hinsicht besonders ist: Erstens ist sie *linkstotal*, denn es gibt keine Ware, der überhaupt kein Preis zugeordnet wird. Dies können wir wie folgt formalisieren:

$$\forall a \in A : \exists p \in \mathbb{N} : a \sim p$$

Zweitens ist die Relation *rechtseindeutig*, denn es gibt keine zwei Preise für ein und dieselbe Ware. Dies können wir wie folgt formalisieren:

$$\forall p, p' \in \mathbb{N} : \\ (a \sim p) \wedge (a \sim p') \Rightarrow p = p'$$

Okay, das schaut etwas kompliziert aus, übersetzt: Je zwei Preise p und p' sind bereits gleich, wenn sie sich auf dieselbe Ware beziehen.

Die Begriffe „linkstotal“ und „rechtseindeutig“ sind im Grunde recht intuitiv gewählt, oder? „Linkstotal“ heißt, dass jedes Element der „linken“ Menge, also A, in Relation zu *mindestens* einem Element aus $\mathbb{N}$ steht; „rechtseindeutig“ heißt, dass es zu *höchstens* einem Element in Relation steht.

Sind diese beiden Eigenschaften erfüllt, so entspricht das intuitiv der Vorstellung einer *Zuordnung*: *Jeder* Ware $a \in A$ wird *genau ein* Preis $p \in \mathbb{N}$ zugeordnet. Mathematisch nennen wir so etwas dann *Abbildung* und benennen die zumeist mit lateinischen oder griechischen Buchstaben, z. B. φ. Damit klar ist, von wo nach wo abgebildet wird, notiert man $\varphi : A \to \mathbb{N}$.

Man möge sich nun fragen, ob es auch so etwas wie *Linkseindeutigkeit* oder *Rechtstotalität* gibt. Die Antwort lautet: Ja, natürlich, und die sind sogar so wichtig, dass sie eigene Namen haben, nämlich *Injektivität* und *Surjektivität*.

Unser Beispiel des Supermarktes scheint für diese beiden Eigenschaften ein schlechtes Beispiel zu sein – ein Gegenbeispiel für Linkseindeutigkeit wäre zum Beispiel, wenn es im Supermarkt eine Packung Butter und eine Tafel Schokolade gäbe, die exakt gleich viel kosten, was gar nicht mal so unwahrscheinlich wäre.

Ferner wird es im Supermarkt wohl kaum Rechtstotalität geben, zumindest, wenn wir als rechte Menge weiter hin $\mathbb{N}$ nehmen: Dazu müsste es unendlich viele Waren geben, die vor allem beliebig teuer werden können. Okay, bei der heutigen Unübersichtlichkeit großer Discounter und der Inflation in Verbindung mit einem hohen Mehrwertsteuersatz möge das dem ein oder anderen Leser gar nicht so komisch vorkommen, aber es ist natürlich Quatsch.

Wenn wir eine Abbildung $\psi : A \to B$ haben, die sowohl rechtstotal als auch linkseindeutig ist, so können wir eine *Umkehrabbildung* $\psi^{-1} : B \to A$ konstruieren, denn die ist dann linkstotal und rechtseindeutig (es drehen sich ja nur „links“ und „rechts“ herum) und erfüllt damit alle Eigenschaften einer Abbildung. Solche Abbildungen nennen wir *Bijektionen*.

Wenn wir zwischen zwei Mengen A und B eine Bijektion herstellen können, so scheint es, als könnten wir diese Mengen von ihrer Größe her gut vergleichen. Sind beide Mengen A und B endlich und gibt es eine Bijektion zwischen A und B, so ist klar, dass $\#A = \#B$. Wie schaut es aber mit unendlichen Mengen aus? Man könnte jetzt sagen: Zwei unendliche Mengen haben ohnehin immer die gleiche Größe, nämlich „unendlich“. Wir werden aber sehen, dass es verschiedene Formen von Unendlichkeit gibt. Ganz viel später kann man sogar zeigen, dass es wesentlich mehr reelle als natürliche Zahlen gibt, obwohl sowohl $\mathbb{N}$ als auch $\mathbb{R}$ unendlich viele Elemente haben.

Aber lassen Sie uns nochmal damit beginnen, alles noch einmal formal darzulegen:

4 Abbildungen

Definition 4.1. Seien A und B Mengen. Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt *Abbildung* (oder *Funktion*) f von A nach B, schreibe $f : A \to B$, wenn f *linkstotal* und *rechtseindeutig* ist, sodass also zu jedem $a \in A$ genau ein $(a, b) \in f$ existiert:

(i) $\forall a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in f$
(ii) $\forall a \in A, b, c \in B :$
$(a,b), (a,c) \in f \Rightarrow b = c$

Dieses eindeutige b bezeichnen wir mit $f(a) := b$.

Definition 4.2. Seine A und B Mengen und $f \in A \times B$ eine Abbildung.

(i) f heißt *injektiv*, falls f linkseindeutig ist: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
(ii) f heißt *surjektiv*, falls f rechtstotal ist: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
(iii) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Wenn f bijektiv ist, nennt man f eine *Bijektion*.

Bemerkung 4.3. Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Bijektion. Dann existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung $f^{-1} : B \to A$, sodass $\forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a$ und $\forall b \in B : f(f^{-1}(b)) = b$.

Definition 4.4. Seien A, B, C Mengen, $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt

$$g \circ f : A \to C, a \mapsto g(f(a))$$

Komposition, sprich „g nach f“.

Definition 4.5 (Besondere Abbildungen)**.** Seien A und B Mengen und sei $A' \subseteq A$.

(i) Eine Abbildung $f : A \to A$ heißt *Permutation* auf A, wenn f bijektiv ist. Ferner sei $\mathrm{Per}(A)$ ist die Menge aller Permutationen auf A.

(ii) Die bijektive Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$ heißt *Identität* auf A. Die injektive Abbildung $\mathrm{in}_A^{A'} : A' \to A, a \mapsto a$ heißt *Inklusion* von A' in A.

(iii) Ist $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, so gibt es mit Bemerkung 4.3 eine bijektive Funktion $f^{-1} : B \to A$, sodass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Dann heißt f^{-1} *Inverse* von f.

Definition 4.6. Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Ferner seien $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$. Dann heiße

$$f(A') := \{f(a) \in B \mid a \in A'\}$$

Bild von A' unter f. Ferner heiße

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

Urbild von B' unter f. Darüber hinaus sei $\mathrm{im}(f) := f(A)$ das Bild der Abbildung f.

Definition 4.7. Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Ferner seien $A' \subseteq A$, $A'' \supseteq A$. Dann heißt

$$f|_{A'} := f \cap (A' \times B) : A' \to B$$

Einschränkung von f auf A'. Eine Funktion $\tilde{f} : A'' \to B$ mit $f = \tilde{f}|_A$ heißt *Fortsetzung* von f auf A''.

Definition 4.8. Sei A eine Menge und $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Familie.

(i) Eine Abbildung

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

heißt *Tupel* über $\{A_i\}_{i \in I}$, falls für alle $i \in I$ gilt $f(i) \in A_i$. Für $f(i) =: a_i$ schreibe auch $f =: (a_i)_{i \in I}$. Ferner sei

$$\prod_{i \in I} A_i$$

die Menge aller *Tupel* über $\{A_i\}_{i \in I}$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Abbildung $f : X_n \to A$ *n-Tupel* über A. Für $f(i) =: a_i$ für alle $i \in X_n$ schreibe auch $f =: (a_1, ..., a_n)$. Ferner sei

$$A^n \quad := \quad \{f : X_n \to A\}$$

die Menge aller *n-Tupel* über A.

Axiom 4.9 (Auswahlaxiom)**.** *Seien A und B Mengen und $\sim \in A \times B$ eine Relation. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, sodass $a \sim b$*
(ii) *Es gibt eine Abbildung $f : A \to B$, sodass für alle $a \in A$ gilt: $a \sim f(a)$*

Bemerkung 4.10. Diese intuitiv einsichtige Aussage kann prinzipiell nicht bewiesen werden, was ziemlich erstaunlich ist. Das folgende Lemma ist, wie nachgewiesen wurde, äquivalent zum Auswahlaxiom.

Lemma 4.11 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge, in der jede Kette $B \subseteq A$ eine obere Schranke hat. Dann hat A ein maximales Element.*

Definition 4.12. Sei A eine Menge. Ist A endlich oder existiert eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$, so heißt A *abzählbar*, andernfalls heißt A *überabzählbar*.

Satz 4.13. *Es sei $n, m \in \mathbb{N}_0$.*

(i) *Existiert eine injektive Funktion $f : X_n \to X_m$, dann ist $n \leq m$.*
(ii) *Existiert eine surjektive Funktion $f : X_n \to X_m$, dann ist $n \geq m$.*
(iii) *Existiert eine bijektive Funktion $f : X_n \to X_m$, dann ist $n = m$.*

Beweis. Hier wird exemplarisch die erste Aussage per Induktion über n bewiesen:

(i) *Induktionsanfang*
Wenn $n = 0$, so ist $n \leq m$ trivial, da $m \in \mathbb{N}_0$

(ii) *Induktionsvorraussetzung*
Für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: Existiert eine injektive Funktion $f : X_{n-1} \to X_{m-1}$, so ist $n - 1 \leq m - 1$

(iii) *Induktionsschritt*
Sei $f : X_n \to X_m$ injektiv. Wegen der Linkstotalität von f ist $f(n) \in X_m$. Definiere nun $\pi : X_m \to X_m$ mit:

$$\pi(k) = \begin{cases} m & \text{für } k = f(n) \\ f(n) & \text{für } k = m \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Permutation ist π bijektiv. Sei $g := \pi \circ f$. Da π bijektiv und f injektiv, ist g injektiv mit $g(n) = m$. Sei nun $h := g|_{\{1,...,n-1\}} : X_{n-1} \to X_m$. Da g injektiv ist und $g(n) = m$, gilt: $\forall k \in X_{n-1} : g(k) \neq m$. Folglich kann $\operatorname{im}(h)$ eingeschränkt werden, sodass $h : X_{n-1} \to X_{m-1}$. h ist freilich ebenso wie g injektiv. Aus der Tatsache, dass h injektiv ist, folgt aber nach der Induktionsvorraussetzung, dass $n - 1 \leq m - 1$, also $n \leq m$.

□

Satz 4.14. *$\mathbb{N}$ ist die kleinste unendliche Menge, in dem Sinne, dass zu jeder unendlichen Menge A zwei Abbildungen, nämlich $f : \mathbb{N} \to A$ injektiv und $g : A \to \mathbb{N}$ surjektiv Form existieren.*

Beweis. Wir beweisen exemplarisch nur die Existenz von f. Hierfür definieren wir die Funktion $f_n : X_n \to A$ rekursiv per Auswahlaxiom:

$$f_n(k) = \begin{cases} f_{n-1}(k) & \text{für } k \neq n \\ a & \text{für } k = n \end{cases}$$

Hierbei sei $a \in \mathcal{A} \setminus \operatorname{im}(f_{n-1})$. Sei nun

$$f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

Da $f_n \subseteq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $f : \mathbb{N} \to A$ eine Funktion mit $f(k) = f_n(k)$ $(k \leq n)$. Ferner ist $f : \mathbb{N} \to A$ injektiv. □

Satz 4.15. *A ist abzählbar genau dann, wenn eine injektive Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ existiert.*

Beweis. Zu „$\Rightarrow$“: Wenn A abzählbar ist, dann existiert nach Definition von Abzählbarkeit eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$. Insbesondere ist diese Abbildung injektiv. Zeige nun „$\Leftarrow$“: Da $f : A \to \mathbb{N}$ injektiv ist, ist die Abbildung $f : A \to \operatorname{im}(f)$ bijektiv. Sei $B := \operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{N}$. Zu zeigen ist nun, dass B abzählbar ist. Falls B endlich ist, ist diese Aussage klar. Falls B unendlich ist, muss eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to B$ angegeben werden, denn dann wäre B abzählbar. Sei g rekursiv definiert mit

$$g(1) = \min(B) \text{ und}$$

$$g(n) := \min(B \setminus \{g(1), ..., g(n-1)\})$$

g ist offensichtlich rechtseindeutig. g ist ebenfalls linkstotal, da $\#B = \infty$. Folglich ist g wohldefiniert. Für g sind zwei Aussagen zu treffen:

(i) $\forall m < n : g(m) < g(n)$
Wegen der rekursiven Definition ist $g(m)$ nicht mehr in $B \setminus \{g(1), ..., g(n-1)\}$ enthalten, folglich ist $g(m) \neq g(n)$. Ferner gilt $B \setminus \{g(1), ..., g(n-1)\} \subsetneq B \setminus \{g(1), ..., g(m-1)\}$. Wegen der Definition über das Minimum der Mengen gilt $g(m) \leq g(n)$. Da, wie festgestellt, gilt $g(m) \neq g(n)$, gilt also $g(m) < g(n)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq g(n)$
Dies ist per Induktion über n leicht ersichtlich:
   a) *Induktionsanfang*
   Für $n = 1$ gilt $1 \leq g(1)$, denn $g(1) \in \mathbb{N}$.
   b) *Induktionsvorraussetzung*
   Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte: $n - 1 \leq g(n-1)$
   c) *Induktionsschritt*
   Wegen der ersten Aussage (i) gilt $g(n-1) < g(n)$. Da wir uns auf den natürlichen Zahlen befinden, ist also $g(n-1)+1 \leq g(n)$. Wegen der IV ist also $n \leq g(n)$.

Hiernach ist leicht einzusehen, dass g bijektiv ist:

(i) „g ist injektiv.“
Dies ist eine direkte Folgerung aus Aussage (i) über g: $m \neq n \Rightarrow g(m) \neq g(n)$.

(ii) „g ist surjektiv.“
Ang. g nicht surjektiv. Dann gibt es ein $k \in B \setminus \operatorname{im}(g)$. Da $B \setminus \operatorname{im}(g) \subseteq B \setminus \{g(1), ..., g(k)\}$, ist $k \in B \setminus \{g(1), ..., g(k)\}$. Da $B \subseteq \mathbb{N}$, ist $k \in \mathbb{N}$, folglich existiert $g(k+1) \in B$. Es ist $g(k+1) = \min(B \setminus \{g(1), ..., g(k)\})$. Da $k \in B \setminus \{g(1), ..., g(k)\}$, ist $g(k+1) \leq k$. Dies ist aber ein Widerspruch zu Aussage (ii) über g. Folglich ist g surjektiv.

□

Satz 4.16. *Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar. Formal bedeutet dies: Falls alle A_i abzählbar sind und I abzählbar ist, gilt:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ abzählbar}$$

Beweis. Zunächst eine Vereinfachung: Da I abzählbar ist, können wir setzen $I = \mathbb{N}$ oder $I = X_n$. Sei ferner $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Nun werden vier Funktionen definiert:

(i) $f_i : A_i \to \mathbb{N}$
Da jede Menge A_i abzählbar ist, gibt es für jedes i eine Funktion $f_i : A_i \to \mathbb{N}$, die injektiv ist.

(ii) $i : A \to I, a \mapsto \min\{j \mid a \in A_j\}$
Für jedes $a \in A$ gibt es nach der Definition der Vereinigung wenigstens ein $j \in I$, sodass $a \in A_j$. i nun ordnet jedem a das kleinstmögliche j zu.

(iii) $\Phi : A \to \mathbb{N}^2, a \to \big(i(a), f_{i(a)}(a)\big)$
Φ ist injektiv, denn für $a, b \in A$ mit $\Phi(a) = \Phi(b)$ gilt:
   a) $i(a) = i(b)$
   b) $f_{i(a)}(a) = f_{i(b)}(b)$
Da aber, wie festgestellt $i(a) = i(b)$, ist $f_{i(a)}(a) = f_{i(a)}(b)$. Da aber $f_{i(a)}$ injektiv ist, muss $a = b$. Folglich ist auch Φ injektiv.

(iv) $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto 2^m \cdot 3^n$
Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist auch Ψ injektiv.

Folglich ist $\Psi \circ \Phi : A \to \mathbb{N}$ injektiv und somit A abzählbar. □

[1] **Kranhold, Florian.** *Sei Epsilon kleiner Null ... – Teil 3: Relationen* erschienen im NEOLOGISMUS Februar 2014, (Link)
[2] http://fkranhold.de/?p=/Universit%C3%A4t/WS_2012-13/Analysis_1 (abgerufen am: 20.11.2013, 21:02)

Differentiation under the integral sign

Ein nettes Integral, welches eines großen Aufwandes bedarf

von Mark Sinzger, Florian Kranhold (Gastbeitrag)

Ziel des gesamten Artikels wird es sein, das Integral

$$I := \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)} \mathrm{d}x$$

zu berechnen. Wir betrachten hierzu $f :]0, \pi/2[\times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x,\alpha) = \frac{\arctan(\alpha \cdot \tan(x))}{\tan(x)}$$

Offensichtlich ist f stetig. Man sieht nun mit der Regel von l'Hospital für $\alpha \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x,\alpha) \\ &= \frac{\partial_x[\arctan(\alpha \cdot \tan(x))]}{\partial_x[\tan(x)]} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{(1+(\alpha \cdot \tan(x))^2)} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Für $\alpha \in [0,1]$ sehen wir ebenso mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to \pi/2} f(x,\alpha) = 0$$

Damit sehen wir, dass $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(\alpha) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \cdot \tan(x))}{\tan(x)} \mathrm{d}x$$

wohldefiniert und stetig ist. Offensichtlich gilt weiter $I = \Phi(1)$. Nun brauchen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz 1 (Differentiation under the integral sign)**.** *Sei $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und im zweiten Argument stetig differenzierbar. Betrachte nun:*

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x$$

Dann gilt:

$$\Phi'(\alpha) = \int_a^b \partial_\alpha f(x,\alpha)\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit dem Mittelwersatz gibt es nun für alle $x \in [a,b]$ und $h > 0$ ein $\alpha \leq \xi(x,h) \leq \alpha + h$, sodass gilt:

$$f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) = \partial_\alpha f(x, \xi(x,h)) \cdot h$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned} &|f(x,\alpha+h) - f(x,h) - \partial_\alpha f(x,\alpha) \cdot h| \\ &= |(\partial_\alpha f(x,\xi(x,h)) - \partial_\alpha f(x,\alpha)) \cdot h| \\ &= |\partial_\alpha f(x,\xi(x,h)) - \partial_\alpha f(x,\alpha)| \cdot |h| \end{aligned}$$

Da f stetig ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $\xi(x,h) - \alpha < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} &|f(x,\alpha+h) - f(x,h) - \partial_\alpha f(x,\alpha) \cdot h| \\ &= |\partial_\alpha f(x,\xi(x,h)) - \partial_\alpha f(x,\alpha)| \cdot |h| \\ &< \varepsilon \cdot |h| \end{aligned}$$

Wähle dazu $h > 0$ entsprechend klein. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha) - \int_a^b \partial_\alpha f(\alpha,x)\mathrm{d}x \cdot h \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \partial_\alpha f(x,\alpha)h|\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |\partial_\alpha f(x,\xi(x,h)) - \partial_\alpha f(x,\alpha)| \cdot |h|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \varepsilon \cdot |h|\mathrm{d}x \\ &= (b-a) \cdot \varepsilon \cdot |h| \end{aligned}$$

□

Mit diesem Hilfssatz wissen wir insbesondere, dass Φ' stetig ist. Der Hauptsatz der Integralrechnung liefert uns damit:

$$I = \Phi(1) = \Phi(0) + \int_0^1 \Phi'(t)\mathrm{d}t$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\Phi(0) = 0$, da über die Nullfunktion integriert wird. Folglich gilt:

$$I = \int_0^1 \Phi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

Mit dem Hilfssatz können wir außerdem Integral und Ableitung vertauschen. Ferner wissen wir $\tan' = 1 + \tan^2$, also $\arctan'(x) = (1+x^2)^{-1}$, und schließen:

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \partial_\alpha \left[\frac{\arctan(\alpha \cdot \tan(x))}{\tan(x)}\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\alpha \cdot \tan(x))^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nun setzen wir $x =: \arctan(y \cdot \alpha^{-1})$ und substituieren:

$$\begin{aligned} &\Phi'(\alpha) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\alpha \cdot \tan(x))^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2+y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{\alpha^2+y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \left[\arctan(y) - \alpha^{-1} \cdot \arctan(y\alpha^{-1})\right]_0^\infty \\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Abschließend sehen wir:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \Phi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\alpha+1} \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot [\log(\alpha+1)]_0^1 \\ &= \log(2) \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Technik

Abfliegen von Wegpunkten ohne absolutes Ortungssystem durch einen Quadrokopter

Erster Teil einer „Jugend-Forscht"-Arbeit

Foto: Lukas Heimann

von Lukas Heimann, Arjun Sarin (Gastbeitrag)

Sehr geehrter Leser, im Winter 2014 haben wir eine „Jugend forscht"-Arbeit mit dem etwas sperrigen Titel *Abfliegen von Wegpunkten ohne absolutes Ortungssystem durch einen Quadrokopter* veröffentlicht. Ziel war es, das Fluggerät, das wir liebevoll „Bernie" getauft haben, autonom Wegpunkte in Innenräumen abfliegen zu lassen, vorerst nur Parabelflüge.

Den ersten Teil der Arbeit über Quadrokopter im Allgemeinen und die Hardware können Sie in dieser Ausgabe des Neologismus lesen. Viel Spaß!

Kurzfassung

Ziel der Arbeit war es, eine autonome Drohne Wegpunkte im Raum ohne Hilfe eines GPS- oder kameragestützten Ortungssystems abfliegen zu lassen. Die Kommunikation zwischen einem Computer und dem von vier Propellern angetriebenen Quadrokopter erfolgt über Bluetooth. Die Sensorik umfasst nur einen Ultraschallsensor, ein Gyroskop und einen Beschleunigungssensor.

Die Software basiert auf dem Open-Source-Flightcontroller-Projekt „MultiWii", das wir für unsere Zwecke um Kommunikations- und Verarbeitungsfunktionalitäten für Wegpunkte erweitert haben. Zusätzlich dazu haben wir noch eine Benutzeroberfläche für einen Computer entworfen und programmiert, durch die der Quadrokopter ferngesteuert werden kann.

Wir konnten ein flugfähiges Gerät bauen, mit dem eine fehlerfreie Kommunikation möglich ist, jedoch bedarf es bei der Stabilisierung des Quadrokopters in der Luft noch weiterer Optimierungsarbeit. Somit ist ein punktgenauer Abflug der Wegpunkte nur begrenzt möglich. Trotzdem reicht die Genauigkeit aus, um bestimmte Flugkurven deutlich erkennbar abzufliegen.

Einleitung

Was ist ein Quadrokopter?

Wenn es um die Beschreibung eines Quadrokopters geht, ist die einfachste Aussage: „Ein Hubschrauber mit 4 Propellern“. Viel mehr gibt auch die griechisch-lateinische Wortherkunft nicht preis: *quadrum* ist Latein für „Viereck“, πτερόν (*pteron*) griechisch für „Flügel“. Doch wenn man einen Quadrokopter bauen möchte, muss man auf die Details achten:

Ganz grundlegend kann zum Beispiel die Ausrichtung der Flugrichtung variieren: Bei der +-Konfiguration zeigt je ein Rotor nach vorne, hinten, rechts und links, bei der ×-Konfiguration jedoch um 45° gedreht in die Zwischenräume. Was auf den ersten Blick ein triviales Problem scheint („Drehen kann man das ja immer!“) wirkt sich später auf Ansteuerung und Flugverhalten aus.

Zudem braucht jeder Quadrokopter (und insbesondere die autonomen) einen bestimmten Grundumfang an Sensorik: Ein Gyroskop (Winkelbeschleunigung) und oft auch ein Beschleunigungssensor (Erdbeschleunigung) sind von grundlegender Bedeutung für die Stabilisierung in der Luft. Ab hier kann beliebig erweitert werden: Von magnetischem Kompass und Sonar bis hin zu GPS und Kameras kann alles verbaut werden, was der Quadrokopter tragen kann.

Was macht man damit?

Bislang dienen Quadrokopter hauptsächlich der Forschung und dem Hobby-Modellbau. Erstere beschäftigt sich dann häufig mit der Zusammenarbeit mehrerer Quadrokopter oder Mustererkennung durch Kameras zur Verortung im Raum. Letztere haben eher Spaß am Zusammenschrauben ihres ganz eigenen Modells aus alten Wii-Fernbedienungen (dazu später mehr) und an der Befliegung des Luftraums über der nächstgelegenen Wiese.

Was machen wir damit und vor allem: Warum?

Unser Projektziel ist ein Zwischending aus beidem: Wir wollen ohne absolutes Ortungssystem wie GPS oder ähnlichem, sondern nur mit Gyroskop, Beschleunigungssensor und einem Abstandssensor einen möglichst genau autonom fliegenden Quadrokopter bauen.

Diese Idee entwickelte sich aus zweierlei Gründen: Einerseits fällt auf, dass dieses Konzept der Steuerung eines Quadrokopters offenbar noch nicht ausprobiert wurde, andererseits aus praktischem Nutzen für unsere Schule: Ob in der Unterrichtsreihe *Fortbewegung zu Land, Luft und Wasser* im Fach Naturwissenschaften der Unterstufe oder um Wurfparabeln unterschiedlicher Objekte bei unterschiedlicher Gravitation im Oberstufenunterricht zu simulieren; ein Quadrokopter kann ungemein helfen, Physik zu veranschaulichen und Interesse für dieses Fach zu wecken.

Hardware

Die Steuergrundlage

Damit ein Quadrokopter solche Funktionalitäten unterstützen kann, benötigt er einen kleinen Computer an Bord. Dieser verarbeitet Sensor- und Kommunikationsdaten, steuert dann die Motoren an und kontrolliert somit den eigentlichen Flug, weswegen er auch Flightcontroller (FC) genannt wird. Der von uns verwendete Flightcontroller heißt *NanoWii* und basiert auf einem *ATmega32u4*-Prozessor. Damit ist er dem Mikrocontroller *Arduino Leonardo* sehr ähnlich und wird sogar mit dessen Bootloader ausgeliefert, wodurch das NanoWii-Board genauso programmiert werden kann wie ein Arduino.

Das NanoWii ist optimiert für Multikopter und besitzt dementsprechend schon eine Grundausstattung an Sensorik. Konkret sind mit dem Sensorchip *MPU-6050* ein Gyroskop (Drehratensensor), das über Drehungen um eine Achse Auskunft gibt, und ein Beschleunigungssensor zur Messung der Erdbeschleunigung verbaut. Zusätzlich haben wir über den I2C-Bus des Boards noch einen nach unten ausgerichteten Ultraschallsensor (*Devantech SRF 02*) installiert, um die Höhe feststellen zu können. Damit der Quadrokopter via Bluetooth ferngesteuert werden kann, ist ein entsprechender Adapter an einen weiteren seriellen Port angeschlossen. Eine wie im „normalen“ Modellbau gebräuchliche Funksteuerung entfällt für uns komplett.

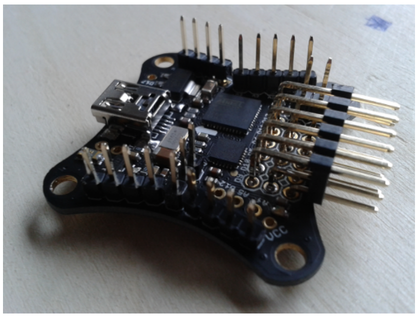


Abb. 2.1: Das schon mit Stiftsleisten belötete NanoWii-Board

Im modernen Modellbau werden fast nur noch leistungsstarke bürstenlose Motoren verwendet. Im Gegensatz zu Bürstenmotoren ist der Verschleiß hier deutlich geringer, da der mechanische Kontakt zu Bürsten entfällt und außerdem können durch den Kommutator hochfrequente Störung die Funkverbindung bzw. die Elektronik negativ beeinflussen. Bürstenlose Motoren können vom Flightcontroller allerdings nicht direkt angesteuert werden. Stattdessen sendet dieser ein Steuersignal an eine *Electronic Speed Controller* (ESC) genannte Elektronik, die die einzelnen Spulen des Motors nacheinander in drei um jeweils 120° verschobenen Phasen ansteuert, wodurch die eigentliche Drehung zustande kommt. Wir verwenden ein Modell von *Flyduino*, das mit Strömen von bis zu 20 A arbeiten kann und außerdem mit der leistungsstarken *SimonK*-Software arbeitet. Diese ist schon fertig vorkonfiguriert und kann die Motoren genauer und schneller steuern als viele Standardfirmwares. Unsere Motoren sind Außenläufer der Firma *EMAX* vom Modell *MT2213*.

Abb. 2.2: Bürstenlose Motoren

Die Propeller und deren Drehimpuls

Mit 10″ × 4.5″-Propellern haben wir uns für sehr große Luftschrauben entschieden, die einen stabilen Flug möglich machen sollen, jedoch die Wendigkeit des Quadrokopters beschränken. Diese werden wir für unsere Zwecke aber auch nicht besonders benötigen. Auch bei den Propellern gibt es ein interessantes Detail: Diagonal gegenüberliegende Motoren drehen nämlich in unterschiedliche Richtungen und dementsprechend sind auch Propeller unterschiedlicher Drehrichtungen verbaut. Der Grund ist, dass bei Drehungen immer auch ein Drehimpuls vorhanden ist, der eine Drehung des gesamten Fluggerätes hervorrufen würde. Dieser Impuls wird bei Hubschraubern mit Einrotorsystemen durch den vertikalen Heckrotor kompensiert. Bei unserem Quadrokopter wirken die Drehimpulse durch die unterschiedlichen Drehrichtungen gegeneinander und summieren sich auf Null auf. Dank dieser Architektur ist die Drehung um die Gierachse (Hochachse) durch Änderung der Drehzahl zweier gegenüberliegender Motoren möglich.

Die Basis

Zur Stromversorgung verwenden wir einen 3-Zellen-Lithium-Polymer-Akku. Dieser ist zwar beim Laden und vor allem bei Tiefenentladungen sehr empfindlich, hat aber keine Probleme, Ströme von mehreren Ampere zur Verfügung zu stellen, wie sie bei vier Motoren unter Volllast auftreten können. Zusätzlich haben Akkus dieses Typs ein gutes Verhältnis von Gewicht zu Leistung, was besonders in der Luftfahrt sehr wichtig ist, da das Gewicht des Fluggerätes maßgebend für dessen effektive Flugzeit ist.

Abb. 2.3: Ladegerät mit Akku

Alle Teile sind auf einem Gestell der Firma Warthox zusammengebaut. Hier liegt eine Besonderheit in den im Rahmen liegenden Stromleitungen, wodurch weniger Kabel benötigt werden und Ordnung auf den Quadrokopter kommt. Die Arme des Gestells sind mit 25cm bewusst relativ lang gewählt, da durch diese Länge ein stabilerer Flug möglich sein soll. Unter dem Gestell sind zwei große Schaumstoffisolierrohre angebracht, um Stürze abzudämpfen und große Schäden zu verhindern.

[1] **Bachfeld, Daniel.** *Quadrokopter-Know-how*, erschienen in *c't Hardware Hacks 03/2013*, S. 42–60
[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Regler (abgerufen am: 02. 01. 2014)

Telegramm an 1/4/2: Es werde Licht

KNX-Bussysteme zur Hausautomatisierung

von Michael Thies

Strom floss vor 50 Jahren schon genauso wie heute. Dementsprechend wenig hat sich am Aufbau einer klassischen Elektroinstallation in Gebäuden in den vergangenen Jahrzehnten geändert. Doch auch vor diesem Bereich macht die Digitalisierung nicht halt und so ergeben sich zurzeit immer neue Möglichkeiten für die Haussteuerung und -automatisierung.

Bereits seit einigen Jahren gibt es den KNX-Standard, einen *Feldbus*, über den Sensoren (wie Taster, Bewegungsmelder, Temperaturfühler, Wetter-Sensoren, etc.) und Aktoren (Relais, Dimmer, Heizungsventile) miteinander kommunizieren können. Bei einem „Feldbus“ handelt es sich nicht, wie vielleicht mancher glauben mag, um ein Fahrzeug

[1] Weitere Infos dazu auf Wikipedia: de.wikipedia.org/wiki/Feldbus

zum Personentransport auf dem Land, sondern um ein elektrisches Leitungsnetz für eben solche Kommunikation[1]. Bei KNX wird dazu ein Netz aus 4adrigen Leitung zusätzlich zur normalen Elektrik im Haus verlegt. Alternativ ist es auch möglich, die Stromleitungen zur Kommunikation zu nutzen, was allerdings weniger üblich ist.

An einem einfachen Beispiel, dem Schalten einer Deckenleuchte, möchte ich die Funktionsweise eines Bussystems gegenüber der „normalen“ Elektrik zeigen:

Die Lampe wird über ein Kabel mit Strom versorgt. Damit sie nicht immer leuchtet, wird bei der konventionellen Elektrik (siehe Abbildung 2.4) ein Schalter zwischengeschaltet, über den man den Stromkreis (in der Abbildung blau) auftrennen kann. Beim Ausschalten wird also im Schalter ein Kontakt aufgetrennt.

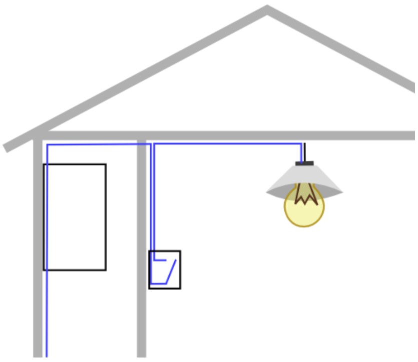


Abb. 2.4: Konventionelle Elektroinstallation (vereinfacht)

Wird die Leuchte auf digitalem Weg über ein KNX-Bussystem gesteuert (Abbildung 2.5), gibt es keinen mechanischen Schalter, mit dem man den Stromkreis auftrennen kann. Stattdessen gibt es irgendwo im Haus (meist im Verteilerkasten) einen *Aktor*, der ein von einem Microcontroller gesteuertes Relais beinhaltet. Dieses schließt oder öffnet anstelle eines Schalters den Stromkreis. Als Bedienelement ist in der Wand ein digitaler Taster eingebaut, der ebenfalls einen Microcontroller beinhaltet. Taster und Aktor sind über die Busleitung (in der Abbildung grün) miteinander verbunden. Sie stellt auch die Versorgungsspannung für den Taster bereit.

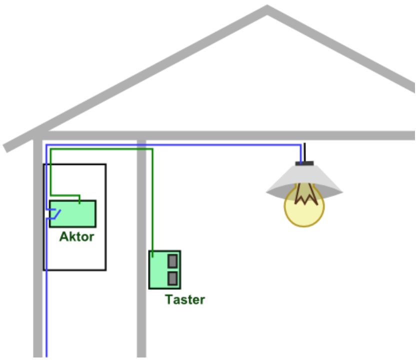


Abb. 2.5: Installation mit einem Bussystem (vereinfacht)

Bei Betätigung des Tasters sendet der Microcontroller im Taster eine Nachricht über die Busleitung an den Aktor. Dieser schaltet daraufhin das Relais ein oder aus.

Man mag sich fragen wozu dieser zusätzliche Aufwand betrieben wird. Schließlich müssen nicht nur viele zusätzliche Leitungen verlegt werden, sondern auch die digitalen Komponenten bezahlt werden, was im bei einer Neuinstallation eine Kostensteigerung von ca. 100% ausmacht. Doch das Bussystem bietet auch viele Vorteile, die erst bei größeren Installationen als in meinem Beispiel wirklich zur Geltung kommen. Dabei ist es vor allem interessant, dass alle Komponenten wie in einem Netzwerk miteinander verbunden sind und miteinander kommunizieren können.

Das bietet eine enorme Flexibilität: Jeder Schalter kann umprogrammiert werden, sodass er eine andere Lampe (die an einer völlig anderen Stelle im Haus sein kann) schaltet. Zusätzlich können Schalter Zentralfunktionen übernehmen, die beispielsweise alle Lampen im Haus (oder auch nur alle im Außenbereich, . . .) gleichzeitig aus- oder einschalten. Auch weitere Komponenten können integriert werden: Eine Wetterstation, die bei Dunkelheit automatisch die Jalousien herunterfährt und das Licht einschaltet, oder Bewegungsmelder, die einerseits Licht schalten und andererseits eine Alarm-Anlage steuern. Schließlich man Logik-Module verbauen, die verschiedene Sensordaten (Tastendrücke, Wetter- und Raumtempertatur-Daten) verknüpfen, um bestimmte Vorgänge zu steuern.

Da jede Komponente im Bussystem (theoretisch) auf alle Objekte Zugriff hat, sind kaum Grenzen gesetzt. Eine wichtige Eigenschaft eines Feldbusses ist dabei auch, dass jede Komponente alle Nachrichten empfängt und so jederzeit über den aktuellen Zustand informiert ist. Ein Lichtschalter kann so beispielsweise über eine LED anzeigen, ob die betreffende Lampe zurzeit eingeschaltet ist – auch, wenn sie durch einen anderen Schalter (oder Bewegungsmelder, Logik-Baustein, . . .) eingeschaltet wurde.

Und nicht nur Lampen können über das Bussystem gesteuert werden. Wie oben schon erwähnt, ist es genauso möglich, Rollläden und Jalousien, die (Fußboden-)Heizung, eine Alarm-Anlage oder eine Belüftung in das System zu integrieren. So kann ein Lichtschalter mit eingebautem Thermostat auch die Steuerung der Heizung und Belüftung übernehmen.

Die über ein KNX-Bussystem versendeten Nachrichten werden *Telegramme* genannt. Jedes Telegramm enthält eine Absender- und eine Ziel-Adresse und den übertragenen Wert.

Bei der Programmierung weist man jedem Gerät im Bussystem eine *Physikalische Adresse* zu (vergleichbar mit einer IP-Adresse im Computernetzwerk). Der Aktor erhält z.B. die Adresse 1.1.3, ein Lichtschalter im Wohnzimmer die 1.1.4, und ein weiterer Lichtschalter die

1.1.5[2]. Für die zu steuernden Objekte legt man sogenannte *Gruppenadressen* an. Beispielsweise könnte die 1/2/1 für die Deckenlampe im Wohnzimmer stehen, die 1/2/2 für eine Wandlampe im Wohnzimmer.

Nun wir der Aktor so programmiert, dass die entsprechenden Relais, an die die Decken- und Wandleuchte angeschlossen sind, auf Telegramme hören, die an die Gruppenadressen 1/2/1 bzw. 1/2/2 gesendet werden.

Die Schalter – wir gehen davon aus, dass sie jeweils zwei Tasten haben – werden so programmiert, dass jeweils eine Taste Telegramme auf eine der Adressen sendet.

Nu...	Name	Funktion	Beschreibung	Gruppenadressen	Länge
0	Schaltobjekt A	Taste 1	Außenlampe Terasse	1/4/0, 0/0/1, 0/0/3, 0/0/8	1 bit
3	Stopp-/Schrittobjekt	Taste 2			1 bit
4	Bewegobjekt	Taste 2			1 bit
6	Schaltobjekt A	Taste 3	Außensteckdosen	1/4/3, 0/0/1, 0/0/3	1 bit
9	Schaltobjekt	Taste 4	Licht WZ vorne	1/1/7, 0/0/1, 0/0/3, 8/2/16	1 bit
10	Dimmobjekt	Taste 4		1/3/3	4 bit

Abb. 2.6: Mit der Software *ETS* können die Bus-Geräte programmiert und jeder Taste eines Schalters eine Funktion und Gruppenadressen zugewiesen werden

Wird nun die Taste für die Deckenleuchte am zuerst genannten Schalter betätigt, sendet dieser ein Telegramm aufs Bussystem, mit dem folgenden Inhalt:

Absender: 1.1.4; Ziel: 1/2/1;
Wert: 1[3]

Alle anderen Geräte empfangen dieses Telegramm, interpretiert wird es jedoch nur von denjenigen, die vorher zum Hören auf die Gruppenadresse 1/2/1 programmiert wurden. Der Aktor 1.1.3 wird also das Telegramm empfangen und daraufhin das Relais für die Deckenleuchte einschalten – das Licht ist an. Zudem wird der Schalter 1.1.5 das Telegramm empfangen, wodurch er über den neuen Zustand der Deckenleuchte informiert ist, sodass er ggf. eine Indikator-LED einschalten kann und zudem beim Betätigen seiner Taste nun ein AUS- statt einem weiteren EIN-Telegramm senden wird.

Es können allerdings nicht nur 1Bit-/Boolean-Werte mit den Zuständen 1 und 0 übertragen werden. Im KNX-Standard sind verschiedene weitere Datentypen für Zahlen, Datum und Uhrzeit und einige spezielle Anwendungen definiert.

So kann etwa ein Temperaturfühler ein Telegramm mit der aktuellen Raumtemperatur (als 2Byte-Gleitkommazahl) senden, woraufhin ein Logikbaustein daraus mithilfe der Soll-Raumtemperatur den Stellwert für das Heizungsventil berechnet. Diesen sendet er wieder (als 1Byte-Prozentwert) auf den Bus, sodass der Heizungs-Aktor das Ventil entsprechend einstellen kann.

Wirklich interessant wird es, wenn man einen Computer ins Bussystem integriert. Dieser kann zum einen die Aufgaben eines Logik-Bausteins übernehmen und Aktionen ausführen, wie:

(i) Wenn es draußen Dunkel wird (Helligkeitswert der Wetterstation) und es nach 18:00 Uhr ist, fahre alle Rollläden im Haus herunter

(ii) Wenn die Sonne scheint (wieder über den Helligkeitswert) und die Raumtemperatur in bestimmten Räumen zu hoch ist, fahre dort die Rollläden zu 75% herunter

(iii) Wenn die Alarm-Anlage ausgelöst wird, versende eine E-Mail (oder SMS), um die Hauseigentümer zu informieren

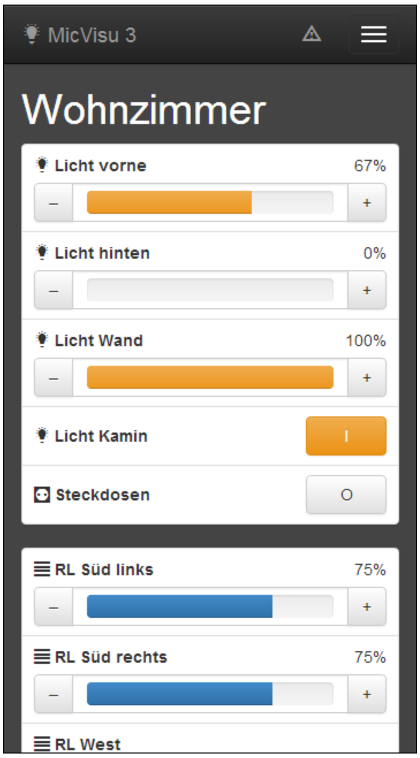


Abb. 2.7: Screenshot aus meiner KNX-Visualisierung *MicVisu*

Zum anderen kann der Computer als Server eine Intranet-Seite (eine sogenannte Visualisierung) zur Verfügung stellen, sodass die Elemente des Bussystems auch mit Computern oder Smartphones im Netz-

[2]Bei großen Anlagen muss das Bussystem in mehrere Abschnitte unterteilt werden, auf die sich die ersten beiden Ziffern der Physikalischen Adresse beziehen. Wir beschränken uns hier aber auf den Bereich 1.1.

[3]Lampen kennen (von Dimmern abgesehen) im Allgemeinen nur die Zustände AUS und EIN, die als Boolean-Datentyp mit den Werten 0 und 1 übertragen werden.

werk oder sogar via Internet von der ganzen Welt aus gesteuert werden können. Die Abbildung 2.7 zeigt einen Ausschnitt aus der Oberfläche, die ich selbst zu diesem Zweck programmiert habe. Sie basiert ausschließlich auf kostenloser (und freier) Software und läuft sehr gut auf dem Scheckkarten-großen Mini-Computer *Raspberry Pi*.

Geistes- und Gesellschaftswissenschaft

Erkenntnistheoretische Zweidimensionalität

Eine kurze Überlegung zu epistemologischen Grundpositionen

von Florian Kranhold

Nach den vielen epistemologischen Überlegungen, die ich in den Neologismus-Ausgaben des letzten Sommers und Herbstes angestellt habe, möchte ich hier nur eine Gegenüberstellung der unterschiedlichen Positionen möglichst strukturiert vornehmen.

Nur allzu oft wird in der Diskussion zwischen Natur- und Geisteswissenschaftlern das *Wie* und *Woher* vermengt, wenn man die Beschaffenheit des menschlichen Erkenntnisapparates untersuchen möchte.

Fragt man nach dem *Woher*, nach der *Quelle* der Erkenntnis, so gibt es zwei Extreme: Den *Rationalismus* und den *Empirismus*, die ich beide in diversen Artikeln erörtert habe. Hier noch einmal in Kürze:

Ein Rationalist glaubt, dass es gesichtere Erkenntnis allein aufgrund der Beschaffenheit unseres Erkenntnisvermögens, also Erkenntnis *a priori*, gibt. Empirische Erkenntnis richtet sich für den Rationalisten nach der Beschaffenheit unseres Erkenntnisvermögens und hat, *a posteriori*, eine andere logische Modalität und damit geringere epistemologische Qualität als Urteile a priori.

Der Empirist glaubt, dass selbst sogenannte „Vernunftswahrheiten" wie mathematische Urteile der Erfahrung entnommen sind und nur deshalb mit Notwendigkeit gedacht werden, weil wir seit Kindesalter von Raum und Zeit (also Geometrie und theoretischer Physik) sowie Kausalität und Zählbarkeit (also Logik und Arithmetik) umgeben sind. Empirische Erkenntnis ist damit das *Einzige*, was uns zugänglich ist.

Natürlich gibt es zwischen diesen Extremen Abstufungen. Kant zum Beispiel geht davon aus, dass die Erfahrung überhaupt erst den Erkenntnisprozess in Gang setzt (sogesehen wäre er Empirist), allerdings die Form des erkannten Gegenstandes bestimmten universellen und vernunftsmäßig, *a priori* gegebenen Erkenntnisprinzipien gehorcht (sogesehen wäre er Rationalist).

Fragt man hingegen nach dem *Wie*, nach der *Realisierung* der Erkenntnis, so stellt man eine völlig andere Frage. Die Extreme hier lauten: *Idealismus* und *Materialismus*. Auch hierzu habe ich schon oft meine Ansichten gegen andere verteidigt und dabei die Unterschiede herausgestellt. Hier auch noch einmal in Kürze:

Der Idealist glaubt, dass jedem Menschen eine nicht-materielle Komponente innewohnt, die zum Beispiel in vielen Religionen und Richtungen der Philosophie als *Seele* bezeichnet wird. Insbesondere gehorcht diese nicht-materielle Komponente nicht den physikalischen Kausalitätsgesetzen. Hiermit möchten die Philosophen bei Anerkennung der Schärfe der Kausalität die Freiheit des Individuums rechtfertigen: Wenn der Mensch nur-materiell ist und die Kausalität der Materie scharf, so wären wir unfähig, Entscheidungen zu treffen. Folglich, so der Idealist, haben wir eine Seele.

Der Materialist glaubt, motiviert durch die naturwissenschaftlichen Erkenntnisse der Hirnforschung, dass der menschliche Geist vollständig beschrieben werden kann durch die Verknüpfung und Reihenfolge von elektrischen Schaltungen und Strömen in unseren Köpfen bzw. durch Hormone und Ähnlichem. Die Problematik des Determinismus könnte eventuell durch die quantentheoretische Unschärfe relativiert werden. Als Hauptargument gegen den Idealismus wird oft die kausale und temporale Interaktion, die wohl irgendwie zwischen Körper und Seele bestehen müsste, aber problematisch ist – soll doch gerade die Existenz einer nicht-materiellen Komponente den Geist der Kausalität entheben! –, angeführt.

Man könnte sich nun fragen, wie sich diese Dimensionen kombinieren lassen. Wir wollen das näher untersuchen:

Der *rationalistische Idealist* steht in Tradition der Neuzeitphilosophen wie Descartes und Leibniz: Er setzt das einzige, dessen ich mir gewiss bin, nämlich „ich denke" (*cogito*), als a priori-Befähigung der Seele, ins Zentrum und macht die Existenz der materiellen Welt, zur der die Seele nicht gehört, überhaupt erst von ihrer Erkenntnisbefähigung abhängig.

Der *empiristische Idealist* steht in der Tradition von Hume und Locke: Zwar ist die Erkenntnisfähigkeit nichts Körperliches, allerdings sind wir zunächst ein völlig unbeschriebes Blatt und lernen selbst Begriffe wie Raum, Zeit und Kausalität erst durch die Erfahrung.

Der *rationalistische Materialist* sieht logische Grundsätze wie Mathematik und Logik als etwas, das sich aus der Konstruktion unserer Köpfe, also aus der Art der Vernetzungen, ergibt und nicht erst durch die Erfahrung wahrgenommen wird. Die Tatsache, dass wir bestimmte Dinge mit Notwendigkeit denken, ist also ein Evolutionsprodukt.

Der *empiristische Materialist* argumentiert wohl am ehesten im Einklang mit den Naturwissenschaftlern: Grundlage des Denkens sind einzig und alleine Verschaltungen im Kopf, und jeder Inhalt ist aus der Erfahrung entlehnt. Mag es vielleicht Instinkte wie „essen wollen“ geben, so ist dennoch alles, was wir über Mathematik und Logik wissen, nur darauf aufgebaut, dass wir ähnliches in der Natur beobachtet haben.

Man könnte, wie ich es oft getan habe, lange über die argumentativen Vor- und Nachteile dieser Positionen diskutieren. Jedenfalls hat keine dieser Positionen die Möglichkeit, widerspruchsfrei gedacht zu werden, außer man bastelt, wie zum Beispiel Spinoza, mit Begriffsabhängigkeiten und Parallelismen ein ganz kompliziertes System.

Interessant ist, dass diese Frage höchstgradig zentral für die Beurteilung von Wissenschaft schlechthin ist: Wenn die Welt *vor* der Erfahrung steht, wie grundsätzlich kann dann die Naturwissenschaft werden? Wenn es keine Erkenntnis a priori gibt, könnte man einem Menschen eine *andere* Logik beibringen? Oder Gegenfrage: Wenn es Erkenntnis a priori gibt, *gibt* es dann de facto eine andere Form der Logik, die wir nur zu denken nicht imstande sind?

Die Krim-Krise in Berlin

von Jannik Buhr

Der folgende Text ist rein kabarettistisch, arbeitet also mit den Mitteln der Satire. Wer sich nicht in der Lage sieht, mit Ironie und Übertreibungen umzugehen, der schließe für die folgende Seite bitte die Augen und summe eine beruhigende Melodie (nicht blinzeln!).

Berlin – Die Krim-Krise (oder liebevoll auch Krim-Krimi genannt) schlägt weitere Wellen als vorerst angenommen. „Die Befreiungsaktion des russischen Militärs“ habe ihn „inspiriert“, so der türkische Staatspräsident Abdullah Gül. Nach Vorbild der russischen Militärintervention auf der Krim hatte die Türkei ihrerseits Truppen entsendet. Nicht auf die Krim, sondern in den allseits bekannten Stadtteil Berlins, „Berlin-Kreuzberg“, um die dort lebende türkisch-stämmige Bevölkerung zu schützen. Er strebt nun freie Wahlen für ein an die Türkei angegliedertes Kreuzberg an und sieht den Migrantenanteil von einem Drittel bereits jetzt klar auf seiner Seite. Zuvor schon, so ein Sprecher der Regierung, habe Kreuzberg Hilferufe an die Türkei abgesendet, denen nun endlich nachgekommen werde. Man möchte damit weitere Krawalle und Auseinandersetzungen zwischen den in Kreuzberg lebenden Minderheiten verhindern. Zudem wurden unserer Zeitung weitere exklusive Quellen zuteil, nach denen die Annektierung Kreuzbergs teil des türkischen Programms sei, in die EU aufgenommen zu werden. „Mittendrin statt nur dabei“ (Sağ Ortadan), so der noch geheim gehaltene Slogan. Man wolle sich schon vor dem offiziellen Beitritt einen sicheren Stand in der EU ermöglichen. Die deutsche Wirtschaft ist derweilen stark verunsichert, ob und in welcher Form wirtschaftliche Sanktionen gegen die Türkei notwendig seien. Natürlich müsse man ganz klar ein Zeichen setzen, dennoch habe man aber die wirtschaftliche Abhängigkeit von Kreuzberg und der Türkei erkannt. Diese sei, so der Vorsitzende der deutschen Wirtschaft, „vor allem kulinarischer Natur“. Um zumindest die Versorgung mit dem Rundnahrungsmittel „Pizza“ sicherzustellen, laufen bereits Planungen für eine mögliche Luftbrücke mit Unterstützung Italiens. Angela Merkel stellte klar, sie sei „wirklich nicht einverstanden“ und auch „nicht erfreut“ über die türkische Intervention. Barack Obama hat unterdessen dem Druck der Republikaner nachgegeben, Amerika wieder „zu der Nation zu machen, die es mal war“ und sich verstärkt in die Angelegenheiten anderer Nationen einzumischen. Die Stellung als „unrechtmäßiger Welt-Sheriff“ dürfe nicht verloren gehen, so ein Repräsentant. Zu diesem Zweck patrouilliert seit Montag der US-Amerikanische Flugzeugträger *Liberty* auf der Spree und feuert in regelmäßigen Abständen Maschinengewehrsalven auf verdächtig wirkende Entenfamilien ab. Die in einer mehr oder weniger verdeckten Mission auf dem Alexanderplatz aufgestellten amerikanischen Mittelstreckenraketen des Typs Pershing II (nuklear bestückt) sind mittlerweile von lokalen Graffiti-Künstlern entdeckt und in bunten Farben bemalt worden. Spruchbänder und Aufkleber zieren sie nun, darunter besonders beliebt: „Will nur spielen“, „Make Döner, not War!“ und „Helene Fischers neue Single – Atemlos durch die Nacht“. Der Ausgang der Situation ist noch ungewiss. Dass sie ohne Folgen bleibt, ist auszuschließen, da offensichtlich ein staatstheoretisches Umdenken stattgefunden hat. Der deutsche Außenminister Frank-Walter Steinmeier zeigte sich nicht gesprächsbereit. Angaben eines Informanten zufolge befände er sich auf Mallorca um die dortige Lage zu überprüfen. Auch Angela Merkel hatte sich nach einem Telefonat mit François Hollande nicht weiter äußern wollen. Auf die Frage, ob Deutschland und Frankeich nun gemeinsame außenpolitische Pläne hätten, antwortete sie nur: „Ich sage nichts. Ab jetzt bin ich die Schweiz."

Leben

Mathematiker im Schwarzwald

Oder: Zwischen Wanderung und Cayley-Hamilton

Foto: Tobias Frangen

von Florian Kranhold

Seit Charlottes Kolumne über das Internatsleben oder Janniks Artikel über die Deutsche Schüler-Akademie im Jahre 2013 habe ich mir überlegt, auch mal einen Ausflug oder ein Ereignis in lockerer Form zu schildern.

Die Möglichkeit, das Wissenschaftliche mit dem entsprechend Lockeren zu verbinden, liegt mir nun vor: Im zurückliegenden Monat haben ein paar meiner Kommilitonen – Mark, Moritz und Tobias – und ich einen dreitägigen Ausflug in den Schwarzwald gemacht, um dort einerseits ein paar interessante mathematische Problemstellungen zu lösen (und das erste Semester Analysis von 2012 richtig zu verstehen!) und andererseits – wie könnte es bei der schönen Umgebung und dem für dieses Jahr sehr erfreuliche Märzwetter anders sein? – uns nicht-mathematischer Aktivitäten zu erfreuen.

Lassen Sie mich chronologisch vorgehen: Bereits während der ca. zweistündigen Hinfahrt von Tübingen nach Freudenstadt haben wir – neben der Planung des Einkaufszettels für die paar Tage – einige interessante Dinge aus Analysis 1 näher wiederholt, so zum Beispiel den exakten Beweis, da für, dass gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Nebenher fragten wir uns, ob sich der globale Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen umkehren ließe, der Form: Wenn für $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ und alle Funktionen $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^+$ ein Paar $(t, x) \in I \times \Omega$ existiert, mit der Eigenschaft, dass

$$\|f(t,x)\| > \alpha(t) \cdot \|x\| + \beta(t)$$

dann gibt es keine globale Lösung. Im Wesentlichen wollten wir damit zeigen, dass es nach der Exponentialfunktion keinen signifikant größeren Bezug zwischen Ableitung und Funktion gibt. Leider haben wir weder einen Beweis noch ein Gegenbeispiel gefunden.

So, genug der Mathematik für ein paar Absätze! In Freudenstadt angekommen ging es mit dem Gepäck in die gemietete Hütte, wo wir erstmal ein wenig auspackten, etwas Gitarre und Quizduell – diese neu in mode geratene Smartphone-App – spielten und alsdann zum Einkaufen gingen. Auf dem Weg dorthin und später auch zurück spielten wir „Kontakt“. Da dieses Spiel auch in meinem Andernacher Freundeskreis sehr verbreitet ist und es ohnehin jeder kennen sollte, hier einmal die vollständige Beschreibung:

Es spielt immer einer (x) gegen alle anderen. Dieser x denkt sich ein Wort *abcd* aus, welches nicht zusammengesetzt ist. Das heißt ganz genau: Ein beim ersten Buchstaben beginnender Teil des Wortes darf nicht bereits ein eigenständiges Wort sein. So etwas wie „Rindfleischetikettierungsüberwachungsaufgabenübertragungsgesetz“ (das gibt es wirklich!) wäre also verboten, „Strafarbeit“ hingegen nicht, da dies zwar auch zusammengesetzt ist, aber „Straf“ noch kein eigenständiges Wort ist.

Person x gibt nun den ersten Buchstaben, also a, preis. Ziel der Anderen ist es nun, sukzessive die weiteren Buchstaben durch einen „Kontakt“ freizuspielen, um am Ende das Wort zu erraten. Hierzu muss einer der Anderen, nennen wir ihn y, ein Wort beschreiben, welches mit de<u>n</u> gleichen Anfangsbuchstaben wie *abcd*, also in der ersten Runde mit a, in der zweiten mit *ab* usf., beginnt. Möglichst so, dass x nicht weiß, worum es geht, denn er kann die Lösung ausrufen und damit den Kontakt verhindern.

Weiß jemand der anderen, etwa z, was gemeint ist, zählen er und y gleichzeitig von 3 bis 1 herunter und sie, also y und z, sagen gleichzeitig das Wort, an welches sie denken. Stimmt es überein und hat x nicht vorher dieses erraten, liegt ein korrekt geschlossener Kontakt vor und x muss einen weiteren Buchstaben preisgeben.

Am Ende verliert natürlich immer x, aber das kann schön lange dauern und sehr belustigend sein. Lustig wird es zum Beispiel wenn sich x ein wenig verbreitetes und phonetisch sowie orthographisch mit wenig Ähnlichkeiten verknüpftes Wort wählt, wie z. B. „Pleonasmus“ (ein Stilmittel). Ist man in der fünften Runde bei „Pleon“ angekommen und weiß niemand der übrigen Spieler, was folgen soll, müssen Phantasieworte wie z. B. „Pleonarium“ gebildet und beschrieben werden.

Ich nehme an, das Prinzip sowie den Belustigungsfaktor des Spieles halbwegs adäquat dargelegt gekonnt zu haben. Nach dem Einkauf und gefühlten 100 Runden des Spieles sowie dem Abendessen haben wir uns mal wieder der lieben Mathematik zugewandt und uns eine allumfassende Übersicht über die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen sowie deren Umkehrfunktionen und wiederum deren Ableitungen verschafft.

Exemplarisch sei hier eine ganz nette Herleitung für eine Potenreihendastellung des artanh gegeben. Wir wissen, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Weiter wissen wir $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$. Mit Quotientenregel ist also klar, dass gilt:

$$\begin{aligned} \tanh' &= \frac{\sinh' \cosh - \cosh' \sinh}{\cosh^2} \\ &= 1 - \tanh^2 \end{aligned}$$

Mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{artanh}'(x) &= \frac{1}{\tanh' \circ \operatorname{artanh}(x)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Wir wollen nun den vorliegenden Ausdruck als Potenzreihe ausdrücken. Mit Kenntnis der geometrischen Reihe sehen wir für $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

Da der artanh ohnehin nur auf $(-1, 1)$ definiert ist, ist der gesamte Definitionsbereich innerhalb des Konvergenzradius und wir können gliedweise integrieren. Somit erhalten wir:

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Nach getaner Arbeit haben wir den Abend mit Kartenspielen wie Tichu und Hanabi verbracht.

Als ich am nächsten morgen zu einer halbwegs gesunden Uhrzeit, also so gegen 13 Uhr, wach wurde, waren meine Mitstreiter bereits dabei, eine nette Integralaufgabe zu lösen. Interessant dabei war, dass ein relativ trivial erscheinendes Lemma im Grunde doch recht aufwändig mit dem Satz von Lebesgue gezeigt werden musste:

Sei $f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ mit $f \in L^1(\mathcal{L}^1)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\int_0^\delta f \mathrm{d}\mathcal{L}^1 < \varepsilon$$

Um dies zu zeigen, betrachte man für $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $f|_{[f>n]}$. Da $f \in L^1$, wissen wir $\mathcal{L}^1([f = \infty]) = 0$. Folglich gilt:

$$f|_{[f>n]}(x) \to 0 \text{ fast überall}$$

Da ferner $f|_{[f>n]} \leq f$, ist der Konvergenzsatz von Lebesgue anwendbar und es gilt:

$$\int f|_{[f>n]} \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \to 0$$

Wir finden also ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\int f|_{[f>n]} \mathrm{d}\mathcal{L}^1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ferner wissen wir nun für alle $\delta > 0$:

$$\int_0^\delta f|_{[f\leq n]} \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \leq n \cdot \delta$$

Wähle folglich $\delta = \varepsilon \cdot 2^{-1} \cdot n^{-1} > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\int_0^\delta f \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \\ \leq &\int_0^\delta f|_{[f>n]} + f|_{[f\leq n]} \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \\ < &\ \varepsilon\end{aligned}$$

Nach diesen Überlegungen sind wir nach Freudenstadt zum Schwimmen gefahren und haben uns dort in einem Außenbecken, einer 17° kalten Eis- und einer 40° warmen Dampfgrotte von der Mathematik ein wenig erholt sowie über das Wesen der Mathematik (das ist philosophisch, nicht mathematisch!) und den Unterschied zu den empirischen Wissenschaften wie der – der Mathematik dem Anscheine nach doch so artverwandten – Physik nachgedacht. Es ist wohl überflüssig, zu erwähnen, dass es uns in der Dampfgrotte – und in einigen ähnlich warmen Gebilden, die zum Schwimmbad gehörten, wesentlich besser als in der Eisgrotte gefallen hat. Jedenfalls hat mir dieser nette Wechsel geholfen, meine Erkältung loszuwerden.

Abends schließlich haben wir uns erneut der netten Integralaufgabe gewidmet und es gelang Mark, sie zu lösen. Ein vollständiger Lösungsweg ist in dieser NEOLOGISMUS-Ausgabe im Bereich Natur- und Formalwissenschaft abgedruckt.

Nach dem Abendessen haben wir uns zur Abwechlung mal der Algebra zugewandt und merkten bei einer Wiederholung des Satzes von Cayley-Hamilton, wie viel man im Verlaufe der Semester schon wieder vergessen hat. Man möge sich das so vorstellen als beginne man an der Spitze eines Kartenhauses und versuche noch einmal, jede Verästelung von Karten darunter zu verstehen, bei uns dann in etwa: „Was sind nochmal Elementarteiler?“ – „Achso, die aus dem ersten Struktursatz“ – „Was sagt der nochmal und für welche Ringe gilt er?“ – „Ist denn überhaupt klar, dass der Polynomring euklidisch ist?“ – „Ja, natürlich blöde Frage.“ – „Warum zerfallen die Vektorräume als $\mathbb{K}[T]$-Moduln?“ – „Achso, da gab's mal ein Lemma mit φ-zyklischen Bausteinen.“ – „Wieso sieht die Matrix da überhaupt so lustig aus?“ – „Achja, Beweis von Satz 5.2.3“.

Irgendwann hat uns dann die Motivation verlassen und wir haben erstmal eine Pause eingelegt und über viele nicht-mathematische Dinge gesprochen, bis schließlich Mark mit einigen kürzeren Aufgaben kam, acht an der Zahl, die wir binnen 24 Minuten lösen sollten und bei denen für jede Lösung eine Runde Pfefferminzlikör getrunken wurde. Wir anderen, also Tobias, Moritz und ich, können nun mit Stolz behaupten, diese Prüfung bestanden zu haben.

Danach war aber endlich Schluss mit Mathe und wir haben noch ein wenig über anderes geredet sowie ein bisschen Gitarre gespielt und gesungen. Außerdem kamen wir irgendwann auf die Idee, Improtheater zu spielen, indem man sich ständig ändernde Standbild-Kombinationen mit sukzessive ausgetauschten Personenkomponenten zusammenstellt.

An dieser Stelle könnte man ein paar Nebensätze über unsere Ferienhütte verlieren: Im Wohnbereich gab es einen netten Holzkamin, der einerseits der Beheizung der Wohnung und andererseits der optischen Erheiterung sowie der Natur-Atmosphäre, die eben beim Geruch frisch verbrannten Holzes entsteht, diente.

Am Folgetag, unserem letzten Tag, unternahmen wir auch nur noch eine Wanderung durch den Schwarzwald in der Nähe unserer Hütte und versuchten vergeblich, unsere Route so zu wählen, dass man noch ein kleines Stück der nachmittagabendlichen Sonne abbekam. Erst als wir ganz oben auf dem Hügel waren, haben wir ein oder zwei Sonnenstrahlen finden können.

Anschließend sind wir die Heimreise angetreten, natürlich nicht ohne dabei ein paar Runden „Kontakt“ zu spielen. Zusammenfassend spreche ich wahrscheinlich im Namen von uns allen, wenn ich feststelle, dass der Ausflug – sowohl in mathematischer als auch in nichtmathematischer, folglich in jeder Weise – bereichernd und erfreulich war.

Die wunderbare Welt der Internatler

Teil 9: Das Finale

von CHARLOTTE MERTZ

Der 21.3.2014 war ein einschneidendes Datum. Nicht nur für mich, sondern auch für diese Kolumne. Denn an diesem Tag bekam ich vormittags mein Abiturzeugnis ausgehändigt.

Minuten später ging ich ein letztes Mal in mein Internatszimmer im zweiten Stock des Gebäudes, um meine restlichen Sachen ins Auto zu tragen, angeklebte Zettel, Zeichnungen von der Zimmertür zu kratzen und dem Internat den Rücken zu kehren.

Nach achteinhalb Jahren Schul- und Internatszeit ist dieser Lebensabschnitt nun beendet.

Nachdem wir in der letzten Schulwoche ein letztes Mal nach einer Feier in den Duschen des Internats schlafen durften, ein letztes Abendmahl eingenommen und störende Farbe an den Wänden schließlich neutral überstrichen hatten, ist mein Leben im Internat nun endgültig vorbei und so wird auch diese Kolumne enden.

Dabei kam ich beispielsweise noch gar nicht dazu, von dem freundlichen Küchenpersonal und der exzellenten Verpflegung zu erzählen, die ich so lange genießen durfte. Sollten Konservierungsstoffe auch das Aussehen konservieren, kann ich mich darauf freuen, lange Zeit nicht zu altern und ewig jung auszusehen. Selbst wenn mir Sorgenfalten und Falten des Missmuts aufgrund des respektvollen Umgangs der Küche mit den Schülern auf die Stirn treten, werden diese sicherlich durch das gesunde und leckere Essen wieder aus meinem Gesicht vertrieben.

Aber ehrlich gesagt beginne ich, auch diese Erfahrung schon zu vermissen. Alles Schlechte, aber auch alles Gute hat mich bisher begleitet und meinen Alltag ausgemacht.

Ich vermute, diese Erfahrung machen gerade viele Abiturienten durch, den Verlust der Gewohnheit, der Umgebung, der vermeintlichen Sicherheiten. Selbst wenn es für mich noch ein Stückchen härter ist als für andere, weil ich zusätzlich mit der Schule noch ein Zuhause verliere, kann ich mir vorstellen, dass mir die Erfahrung Internat viel gebracht hat.

Unter anderem zählt auch der Aspekt des Abschiednehmens oder des Lösens von der Familie dazu. Somit fällt es nun nicht nur mir, sondern auch meiner Familie leichter, mit längeren Trennungen klar zu kommen. Das bedeutet nicht, dass wir uns weniger lieb haben, sondern dass wir seit meinem 10. Lebensjahr gelernt haben, uns zu verabschieden. Meine Familie merkt bereits seit 8 Jahren, dass ich immer selbstständiger und erwachsener werde, je öfter ich Wochenenden zum nach Hause kommen auslasse und stattdessen bei Freunden verbringe. In der letzten Wochen vor dem Abitur bin ich aus Versehen teilweise über einen Monat nicht zuhause gewesen.

Ich hoffe, dass sich dieser Aspekt auch in der nächsten Zeit als Vorteil erweist. Denn nach dem Abenteuer Abitur steht schon das nächste Abenteuer vor der Tür.

Jannik und ich haben nämlich den Plan, ab Juni für etwas weniger als ein Jahr in Neuseeland unser Glück zu versuchen.

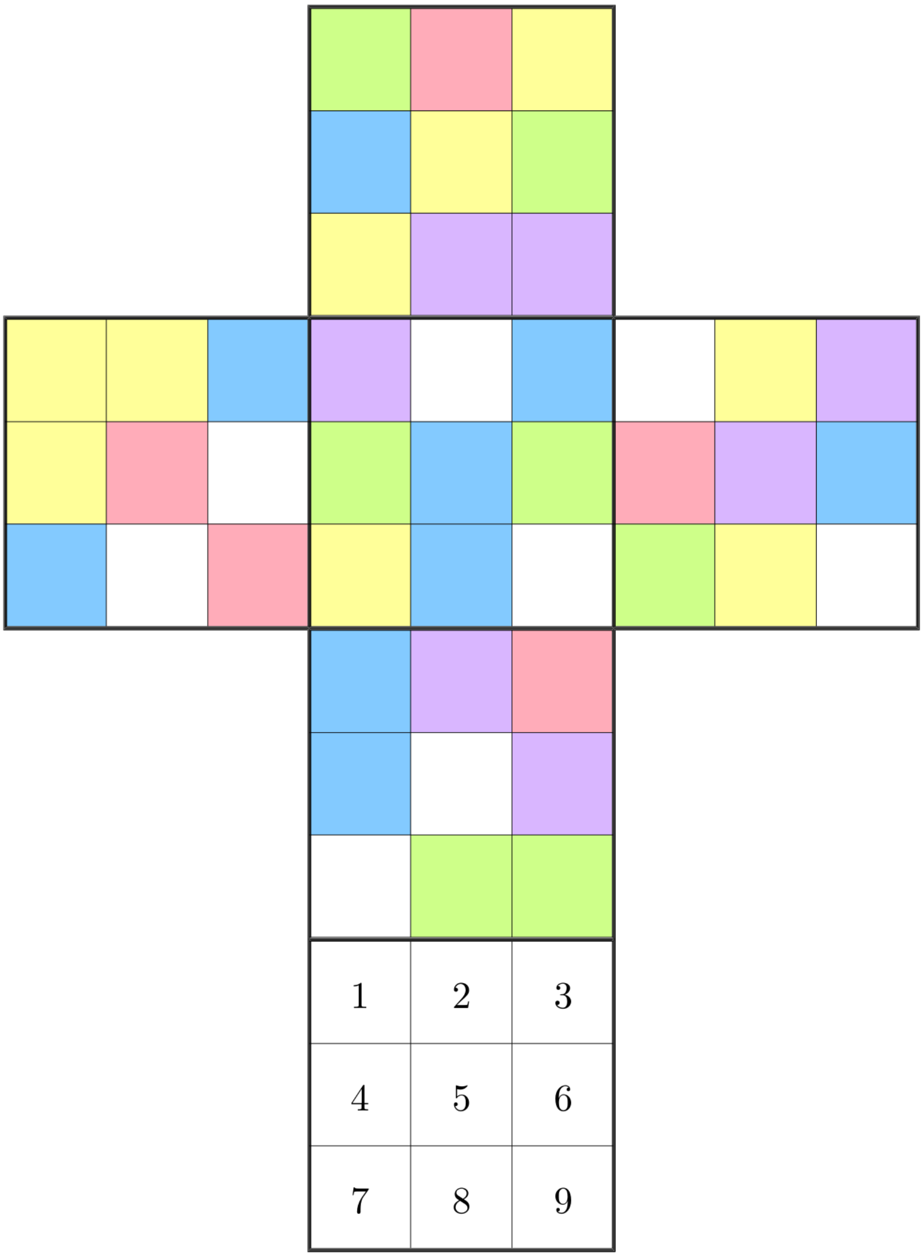
Optimalerweise haben wir vor, aus unserer Reise ebenfalls eine Art Kolumne zu machen. Einen Reisebericht vom anderen Ende der Welt. Die Tickets sind bereits gekauft, alles andere ist noch offen. Aber wir halten euch auf dem Laufenden.

Kreativ

Ein kleines Rätsel

von Marcel Hörz

Die folgende Abbildung zeigt die Abwicklung eines verdrehten Zauberwürfels, bei welchem eine ganze Seite fehlt. Mit ein bisschen Logik kann diese rekonstruiert werden und den Zahlen 1 bis 9 die Farbfelder zugeordnet werden. Viel Spaß beim Knobeln! Eine Auflösung wird es in der kommenden Ausgabe geben.



Das letzte Problem

von Jannik Buhr

Am Wasserfall gewalt'ge Wogen wogen,
wo wilde Wasser wütend wallen,
um dem Abgrund zu entkommen.
Doch die Getöse wirkungslos verhallen.
Vorbei an dem Gestein
wie aus Knochen und Gebein.
Wo strauchelnd Sträucher wahnhaft wunde Wurzeln
in die Felsen krallen.
Doch dem Wasser ist gewiss,
ob jetzt ob hier und überall
am Ende kommt nur eins,
Der Fall.

A Criminal Story

von Jannik Buhr

It was a dark and stormy night, when … A lot of good stories start this way and even end there, with a corpse or something else lying in a pool of blood. But since every story is different this one is about to begin in broad daylight, and not in a gloomy backyard, but in the well-lit kitchen of Alexandro. Just Alexandro, his family name shall not matter to you, because he won't play a big role on the following pages making up this story. He is not dead, though. For now. As my story doesn't start with a corpse you might say: "Boring!" But wait, I'll give you something even better: Toast!

To be precise it's burnt and very hot toast, so Alexandro cried out loud when he tried to catch it with his bare fingers while holding a cup of coffee in the other hand. He drew his fingers back, shaking them wildly at the same time and as the shock running through his body reached his other hand he cried out again, when hot coffee flowed over his right forearm. By the time his cup shattered on the linoleum kitchen floor, he was already holding both, fingers and forearm, under the tap letting the water diminish the pain. That should be enough for you to know about Alexandro because in the next scene he will finally be dead. Are you happy now? You bloodthirsty readers out there!

"He burned his fingers on hot toast." Mr. Jackson told the two detectives in his usual professional and cold voice, free of any emotions. You can't show too much of emotions as a pathologist and Mr. Jackson was one of the best.

"So why is he here then, if he just burned his fingers?" Arno asked. "Because he is dead. I'm a pathologist and it's my job to cut up dead people." Jackson answered in a funny voice as if talking to a small child.

"I know that he is dead, but why is he dead?" Arno was angry by now. His colleague, Andrea, had to turn around, pretending to write something in her notebook, so that no one would be able to notice the smile sneaking to her face. She thought it would be inappropriate to laugh standing next to a dead body, but then it occurred to her that a corpse wouldn't complain about it and she didn't believe in any god punishing her for that, so she allowed herself a brief grin. Mr. Jackson didn't respond to the question directed at him because it was obvious to anybody standing in the tiled room with its single table and bright, clean neon light why Alexandro was dead as stone. The only person not perceiving the big kitchen knife with the black rubber handle sticking out of Alexandros head right above his left ear was Arno. When he finally noticed the Corpus Delicti pointing from the bodies head at a weird angle, making Alexandro look like a disfigured Teletubby, Andrea burst out laughing over Arno's puzzled facial expression and the overall situation. A few minutes later all three were laughing, standing around Alexandros dead body and beginning to chat happily. They had known each other for 6 years now and stayed in contact after their time at police academy working together on various cases. Therefore they really enjoyed talking and for sure Alexandro was happy lying amongst them. Yet, he didn't reply when Arno asked him. But he seemed very happy to them. A scenery involving a corpse with a kitchen knife stuck in its head couldn't have been more peaceful.

Time was ticking along quite nicely and Mr. Jackson decided to open a bottle of red wine to celebrate the beginning of their newest case, working together in a team. That's the exact moment Alexandro chose to open his eyes.

Did I tell you Alexandro wouldn't play a big role? Well, I've been lying to you. Sorry for that, but I had to do so in order to not spoil the surprise. You are surprised, aren't you? Because if not, it would be senseless to continue writing with you already knowing everything. But let's see whether I can surprise you again.

All of a sudden, a cracking voice filled the small room. It came right out of the corpse but his lips weren't moving. His body was still dead. "Good morning Ladies and Gentlemen." Arno backed off, dropping his glass of wine, and fell on the only chair around. Andrea was shocked, too; they both had seen quite a bunch of dead people in their career, but this was new. Solely Jackson kept calm and took a small dissecting knife from his pocket. "You have the exclusive honour of speaking to a murderer you'll never find." the voice intonated.

Jackson drew closer and positioned the scalpel at Alexandro's throat. Pressing against the jawbone he revealed the smooth skin above the dead man's windpipe and began to make a precise cut.

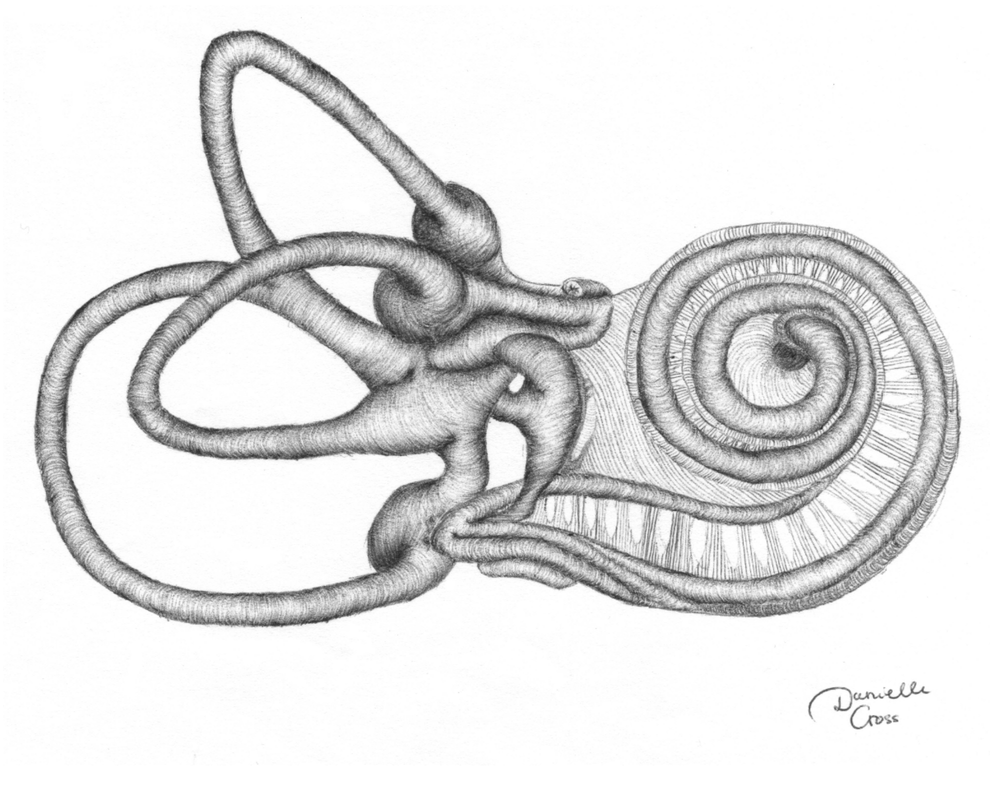
Nevertheless, the creepy voice continued: "And I'm not only liable for the death of Alexandro, I will also kill you. All the three of you."

By this time Mr. Jackson was holding a small black cone, which had emitted the sound. "I bet he didn't swallow that on purpose," he explained, "it's a kind of wireless speaker."

The old friends weren't too impressed by the threat of possible death. They had heard plenty of them from criminals they had arrested and put into jail and were used to hearing things from "You'll pay for this when I get out of here." to "I'll kill that little kitten." all day long.

Cochlea

von Danielle Cross



Impressum

Chefredakteur:
Florian Kranhold

Layout:
Tobias Gerber, Florian Kranhold
Erstellt mit LaTeX

Logo:
Michael Thies

Autoren:
Florian Kranhold, Lukas Heimann, Michael Thies, Jannik Buhr, Charlotte Mertz, Danielle Cross, Marcel Hörz

Gastautoren:
Mark Sinzger, Arjun Sarin

Redaktionsanschrift:
Florian Kranhold
Rottenburger Straße 8
72070 Tübingen

Kontakt:
www.neologismus-magazin.de
www.facebook.com/neologismus.magazin
info@neologismus-magazin.de

Veröffentlicht am 4. April 2014