

NEOLOGISMUS

AUSGABE 02/2014



Foto: Marcel Hörz

Surrealistisches Kunstwerk – eine Spinne – S. 7

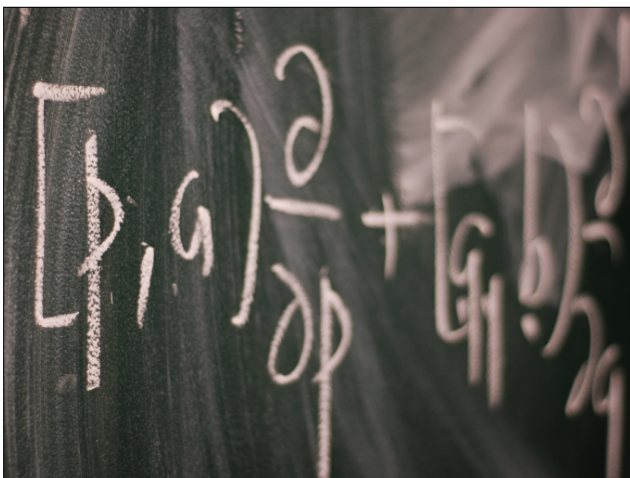


Foto: Eric Wüstenhagen – flickr.com

Sei Epsilon kleiner Null ... – S. 3



Foto: Heike Tilmann – commons.wikimedia.org

Notiz@Mainz – S. 7

INHALTSVERZEICHNIS

1 Natur- und Formalwissenschaft	3
Sei Epsilon kleiner Null, Teil 3: Relationen	3
2 Geistes- und Gesellschaftswissenschaft	6
Open science	6
3 Kreativ	7
Surrealistisches Kunstwerk – eine Spinne	7
Notiz@Mainz	7
Impressum	8

NATUR- UND FORMALWISSENSCHAFT

Sei Epsilon kleiner Null ...

Teil 3: Relationen

von FLORIAN KRANHOLD

Erinnern wir uns daran, was wir bereits alles mathematisch können: Wir wissen, was Aussagen sind. Wir können – durch Aussagenformen – einem Subjekt eine Eigenschaft zuweisen und wir können für eine gegebene Aussagenform die Menge der Subjekte angeben, die diese Eigenschaft besitzen und diese Mengen bearbeiten.

Damit können wir schon eine ganze Reihe von Dingen, die es in der Alltagssprache gibt, formalisieren. Subjekte mit Eigenschaften. Subjekte ohne eine Eigenschaft. Subjekte, die diese, aber nicht jene Eigenschaft haben. Wie aber formalisieren wir den folgenden Satz?

„Anton liebt Bertha.“

Klar, wir können das Prädikat „Bertha lieben“ als Aussagenform L_B verstehen und „ $L_B(\text{Anton})$ “ schreiben, aber das ist uns irgendwie nicht allgemein genug. Wir wollen ein Prädikat mit zwei Veränderlichen haben, also:

$L(a, b) : \Longleftrightarrow \text{„}a \text{ liebt } b\text{.“}$

Solche habe ich ganz kurz bereits in Satz 1.12 (November-Ausgabe des NEOLOGISMUS^[1]) erwähnt. Eine Theorie, welche diese aber in der Mengenlehre hinreichend gut beschreibt, haben wir aber noch nicht.

Wir nennen eine Aussagenform mit zwei Argumenten *Relation* (Nachher wird das nochmal präzisiert). Man überlegt sich nun, welche Arten von Relationen es geben kann. So stellt man zum Beispiel sehr schnell fest, dass die Relation „lieben“, wahrscheinlich zum Bedau-

ern vieler, nicht unbedingt auch in der andere Richtung funktioniert. Es gilt also nicht:

$$L(a, b) \Leftrightarrow L(b, a)$$

Etwas unmathematischer: Bloß weil Anton Bertha liebt, heißt das natürlich nicht, dass auch Bertha Anton liebt. Aber offenbar gibt es auch solche Relationen, wie zum Beispiel die Aussagenform „haben die gleiche Haarfarbe“. Solche Relationen nennt man aus naheliegendem Grunde *symmetrisch*. Was man sich nun fragen könnte, wäre das folgende: Gibt es Relationen, bei denen sichergestellt ist, dass die Aussage wahr ist, wenn ich zweimal das Gleiche einsetze? „lieben“ ist da offenbar ein schlechter Kandidat – offenbar würde nicht jeder angeben, sich selbst zu lieben. „gleiche Haarfarbe haben“ da schon eher: Jeder hat die gleiche Haarfarbe wie er selbst.

Nun ist klar, dass eine Relation über ihren Sinn, also der dahinterstehenden Aussage charakterisiert ist. Es gibt aber, wie schon bei den Aussagen, noch eine weitere Möglichkeit, die Relation vollständig zu charakterisieren: Durch die Menge aller Paare „ a in Relation zu b “. Natürlich muss nicht unbedingt durch die Menge aller Paare auf den dahinterstehenden Sinn der Relation zurückgeschlossen werden können – was wäre wenn die Menschen gleicher Haarfarbe zufälligerweise auch gleiche Augenfarbe hätten (ist zwar Quatsch, aber angenommen, es wäre so)? Dann wäre die Menge der Paare bzgl. beider Relationen gleich.

Wir wollen aber im folgenden Relationen als Mengen von Paaren auffassen. Für bestimmte Arten von

Relationen werden wir noch eine andere Mengencharakterisierung kennen lernen.

Also, genug der Vorrede, kommen wir zur Mathematik:

3 RELATIONEN

Definition 3.1. Seien A und B Mengen. Eine Menge $\sim \subseteq A \times B$ heißt *Relation*. Falls für $a \in A$ und $b \in B$ gilt $(a, b) \in \sim$, so schreibe $a \sim b$.

Definition 3.2. Sei A eine Menge. Eine Relation $\sim \subseteq A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation auf A* , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) *Reflexivität*
Für alle $a \in A$ gilt $a \sim a$.
- (ii) *Symmetrie*
Für alle $a, a' \in A$ gilt die Äquivalenz: $a \sim a' \Leftrightarrow a' \sim a$
- (iii) *Transitivität*
Für alle $a, a', a'' \in A$ mit $a \sim a'$ und $a' \sim a''$ gilt $a \sim a''$.

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und sei $a \in A$. Dann heiße

$$[a] := \{a' \in A, a \sim a'\}$$

Äquivalenzklasse von a . Ferner heißt a *Repräsentant von $[a]$* .

Definition 3.3. Sei A eine Menge. Dann heißt eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *Partition*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) *Exhaustivität*
 $\bigcup \mathcal{A} = A$
- (ii) *Disjunktivität*
 $\mathcal{A}$ ist paarweise disjunkt.
- (iii) *Irreduzibilität*
 $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

Satz 3.4. Sei A eine Menge und $\sim$ eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
- (ii) Es existiert eine Partition $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\forall(a, b) \in \sim: \exists A_i \in \mathcal{A} : a, b \in A_i$.

Beweis.

(i) „ $\Rightarrow$ “

Sei $\mathcal{A}$ die Familie der Äquivalenzklassen von $\sim$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Partition ist:

a) *Exhaustivität*

Es gilt $\forall a \in A : [a] \subseteq A$ und $\forall a \in A : a \in [a]$. Daher ist $\bigcup \mathcal{A} = A$.

b) *Disjunkтивität*

Ang. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $c \in A$ mit $c \in [a] \cap [b]$. Diesen Ausdruck können wir wegen der Regeln der Symmetrie (s) und der Transitivität (t) umformen:

$$\begin{aligned} a \sim c \text{ und } b \sim c \\ \stackrel{(s)}{\Leftrightarrow} a \sim c \text{ und } c \sim b \\ \stackrel{(t)}{\Rightarrow} a \sim b \\ \stackrel{(s)}{\Leftrightarrow} b \sim a \end{aligned}$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass $[a] = [b]$. Sei hierzu $d \in A$. Dann gilt die Implikation:

$$\begin{aligned} d \in [a] \\ \Rightarrow a \sim d \\ \Rightarrow b \sim d \\ \Rightarrow d \in [b] \end{aligned}$$

Für $e \in A$ hingegen gilt die Implikation:

$$\begin{aligned} e \in [b] \\ \Rightarrow b \sim e \\ \Rightarrow a \sim e \\ \Rightarrow e \in [a] \end{aligned}$$

Folglich $[a] \subseteq [b]$ und $[b] \subseteq [a]$, damit $[a] = [b]$.

c) *Irreduzibilität*

Für jede Menge $A_i \in \mathcal{A}$ gibt es ein $a_i \in A$, sodass $A_i = [a_i]$. Wie bereits festgestellt, ist $a_i \in [a_i]$, somit ist $A_i = [a_i] \neq \emptyset$.

(ii) „ $\Leftarrow$ “

Es sei $\mathcal{A}$ eine Partition mit $\forall(a, b) \in \sim: \exists A_i \in \mathcal{A} : a, b \in A_i$. Es ist zu zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

a) *Reflexivität*

Für $a \in A_i$ ist (trivialerweise) $a \in A_i$, daher $a \sim a$.

b) *Symmetrie*

Für jedes $a \sim b$ existiert per Definition von $\mathcal{A}$ ein $A_i \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in A_i$. Also ist auch $b, a \in A_i$. Folglich ist auch $b \sim a$ gegeben.

c) *Transitivität*

Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Nach Definition gibt es dann $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, sodass $a, b \in A_i$ und $b, c \in A_j$. Offenbar ist also $b \in A_i \cap A_j$, also ist $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Wie aber oben bewiesen, muss demnach $A_i = A_j$ sein. Also ist $a, b, c \in A_i = A_j$. Folglich ist auch $a \sim c$. □

Definition 3.5. Sei A eine Menge. Eine Relation $\sim \subseteq A \times A$ heißt *Ordnungsrelation*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Reflexivität*

Für alle $a \in A$ gilt $a \sim a$.

(ii) *Transitivität*

Für alle $a, a', a'' \in A$ mit $a \sim a'$ und $a' \sim a''$ gilt $a \sim a''$.

(iii) *Antisymmetrie*

Für alle $a, a' \in A$ gilt folgende Äquivalenz:

$$a \sim a' \text{ und } a' \sim a \Leftrightarrow a = a'$$

Häufig schreibe als Symbol für eine Ordnung statt „ $\sim$ “ auch „ $\leq$ “. Eine Menge A zusammen mit einer Ordnungsrelation $\leq$ heißt *geordnete Menge*, schreibe $(A, \leq)$.

Bemerkung 3.6. Unsere bisherige Vorstellung von „ $\leq$ “ ist linear, d.h. jedes Element einer Menge ist mit jedem beliebigen anderen vergleichbar. Dies muss hier nicht sein. Als anschauliches Beispiel dient $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ und die Ordnungsrelation $\subseteq$. Offenbar ist $\emptyset \sim \{1\} \sim \{1, 2\}$ und $\emptyset \sim \{2\} \sim \{1, 2\}$. Dennoch sind $\{1\}$ und $\{2\}$ nicht vergleichbar.

Definition 3.7. Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Ferner sei $B \subseteq A$.

(i) $a \in A$ heißt *minimales Element* von A , wenn für alle $b \in A$ gilt: $b \not\leq a$ oder $a = b$.
 $a \in A$ heißt *maximales Element* von A , wenn für alle $b \in A$ gilt: $a \not\leq b$ oder $a = b$.

(ii) $a \in A$ heißt *Minimum* von A , wenn für alle $b \in A$ gilt: $a \leq b$.
 $a \in A$ heißt *Maximum* von A , wenn für alle $b \in A$ gilt: $b \leq a$.

(iii) $a \in A$ heißt *untere Schranke* von B , wenn für alle $b \in B$ gilt: $a \leq b$.
 $a \in A$ heißt *obere Schranke* von B , wenn für alle $b \in B$ gilt: $b \leq a$.

Wenn B ein Maximum oder eine obere Schranke hat, so heißt B *nach oben beschränkt*. Wenn B ein Minimum oder eine untere Schranke besitzt, so heißt B *nach unten beschränkt*.

Beispiel 3.8. Sei

$$A := \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

und die Ordnung sei $\subseteq$. Man betrachte $\{1, 2\}$:

(i) Offenbar ist $\{1, 2\}$ ein maximales Element, denn $\forall a \in A : \{1, 2\} \not\subseteq a \vee a = \{1, 2\}$

(ii) $\{1, 2\}$ ist kein Maximum, denn $\exists a \in A : a \not\subseteq \{1, 2\}$.

Beispiel 3.9. Sei

$$A := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, B := \{\emptyset, \{1\}\}$$

Die Ordnung sei $\subseteq$.

- (i) Das Maximum von B ist eindeutig $\{1\}$, denn $\forall b \in B : b \subseteq \{1\}$.
- (ii) Die obere Schranke von B ist $\{1\}$, aber auch $\{1, 2\}$. Beide sind in der Menge A enthalten und genügen der Bedingung.

Definition 3.10. Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Ferner sei $B_1 \subseteq A$ noch oben beschränkt und $B_2 \subseteq A$ nach unten beschränkt.

- (i) Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*, schreibe $\sup(B_1)$. Formal gelten also für alle $a \in A$ und $b \in B_1$ folgende zwei Aussagen:

$$b \leq \sup(B_1) \\ (\forall b \in B : b \leq a) \Rightarrow \sup(B_1) \leq a$$

- (ii) Die größte untere Schranke heißt *Infimum*, schreibe $\inf(B_2)$. Formal gelten also für alle $a \in A$ und $b \in B_2$ folgende zwei Aussagen:

$$b \geq \inf(B_2) \\ (\forall b \in B : b \geq a) \Rightarrow \inf(B_2) \geq a$$

Bemerkung 3.11. Nicht jede nach oben beschränkte Menge hat ein Su-

premum. Betrachte eine Teilmenge aus $(\mathbb{Q}, \leq)$:

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

Diese Menge hat obere Schranken, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beispiel 3.12.

- (i) Für das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$ ist 1 maximales Element, Maximum und Supremum. 1 ist eine obere Schranke, 27 aber genauso.
- (ii) Für das Intervall $[0, 1[\subseteq \mathbb{Q}$ ist 1 Supremum. Das Intervall hat kein Maximum und kein maximales Element. 1 ist eine obere Schranke, 14 aber genauso.
- (iii) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist nach unten beschränkt, nach oben nicht beschränkt. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist nicht beschränkt.

Definition 3.13. Eine geordnete Menge $(A, \leq)$ heißt *wohlgeordnet*, wenn jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ ein Minimum hat.

Axiom 3.14. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist wohlgeordnet.

Satz 3.15 (Vollständige Induktion). Sei $P : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{w}, \text{f}\}$ eine Aussagenform auf $\mathbb{N}$ und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $P(n_0)$. Ferner gelte für

alle $n \geq n_0$ die Implikation (Induktionsschritt):

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $P(n)$

Beweis. Sei die Antezedens erfüllt und sei

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n) \text{ und } n \geq n_0\}$$

Ang. $A \neq \emptyset$. Da $A \subseteq \mathbb{N}$, gilt nach Wohlordnungsprinzip

$$\exists m \in A : m = \min(A)$$

Wegen des Induktionsanfangs $P(n_0)$, ist $m \neq n_0$. Also ist $m - 1 \geq n_0$. Da $m - 1 < m = \min(A)$, ist $m - 1 \notin A$, also gilt $P(m - 1)$. Wegen des Induktionsschritts ist dann aber auch $P(m)$, also $m \notin A$. Dies ist ein Widerspruch, also ist $A = \emptyset$. Folglich ist $P(n)$ für alle $n \geq n_0$. $\square$

Definition 3.16. Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Die Ordnungsrelation $\leq$ heißt *Vollordnung*, wenn alle Paare $a, a' \in A$ vergleichbar sind, d. h. $a \leq a'$ oder $a' \leq a$. Dann heiße A *vollgeordnet*. Eine vollgeordnete Teilmenge $B \subseteq A$ heißt *Kette*.

[1] http://fkranhold.de/?p=/Universit%C3%A4t/WS_2012-13/Analysis_1
(abgerufen am: 20.11.2013, 21:02)

GEISTES- UND GESELLSCHAFTSWISSENSCHAFT

Open science

Eine Vision

von JANNIK BUHR

Seit den 1950er Jahren versuchten Amerikaner und Russen in einem regelrechten Wettlauf, den Mond zu erreichen, erst am 21. Juli 1969 gelang mit der Apollo-Mission die erste bemannte Mondlandung. Man stelle sich einmal vor, diese beiden Nationen hätten nicht gegen-, sondern miteinander gearbeitet. Wir wären heute vermutlich schon um einiges weiter.

Wer glaubt, dieses Prinzip des Wettkampfes sei mit dem Ende des Kalten Krieges untergegangen, irrt gewaltig. Noch heute geht es in der Wissenschaft primär darum, Konkurrenten auszuschalten, alleine möglichst viel Profit einzuheimen und nicht darum, gemeinsam die Forschung voranzutreiben und

damit „die Welt zu verbessern“.

Meine Vision ist es also, genau das zu ändern. Eine Plattform zu schaffen, die Wissenschaftlern und Forschungsgruppen einen Austausch und Zusammenarbeit ermöglicht. Dass es im Kleinen funktioniert, wissen wir bereits: Wikipedia ist ein glänzendes Beispiel für den Erfolg frei zugänglicher Information, aber eben nur auf der noch sehr grundlegenden Ebene der „basis Informationen“. Auch in anderen Bereichen sind wir längst kommunikativer und kollaborativer geworden. Bei Problemen fragen wir gerne mal unsere Follower auf Twitter oder Facebook und Open-Source-Projekte wie GIMP und Blender zeigen im Software-Bereich längst, dass Zusammenarbeit sich lohnt.

Wieso also nicht auch in der Wissenschaft?

Ich suche ein Team von Menschen (Software-Entwickler, Web-Designer, Wissenschaftler, Querdenker), das mit mir eine Art „Social-Science-Network“ aufbauen möchte. Dieses soll es Forschern ermöglichen, ein Profil anzulegen, ihre Arbeitsgruppen zu organisieren, Ergebnisse und Fortschritte zu veröffentlichen, andere, die sich mit ähnlichen Projekten beschäftigen, zu finden und von gemeinsamen Ideen zu profitieren. Später kann auch noch eine Interessensvertretung in der Politik der jeweiligen Länder und der Kontakt zu Lehrenden geschaffen werden.

Das ist meine Vision, aber ich weiß, dass ich nicht alleine bin.

KREATIV

Surrealistisches Kunstwerk – eine Spinne

von MARCEL HÖRZ



Notiz@Mainz

von TERESA TREITZ

Hier.
Ein Lächeln.
Dort ein Wort.
Gemeinsame Stunden, Familie, Gesang.
Gebet, Abschied, Trauer.
Frieden in
Ewigkeit.

IMPRESSUM

Chefredakteur:

Florian Kranhold

Layout:

Tobias Gerber, Florian Kranhold

Erstellt mit L^AT_EX

Logo:

Michael Thies

Autoren:

Florian Kranhold, Jannik Buhr, Teresa Treitz, Marcel Hörz

Redaktionsanschrift:

Florian Kranhold

Rottenburger Straße 8

72070 Tübingen

Kontakt:

www.neologismus-magazin.de

www.facebook.com/neologismus.magazin

info@neologismus-magazin.de

Die gedruckten Artikel geben nicht immer die Meinung der Redaktion wieder. Änderungen der eingereichten Artikel behalten wir uns vor. Trotz sorgfältiger Prüfung übernehmen wir keine Haftung für die Richtigkeit der abgedruckten Veröffentlichungen. Der Neologismus steht unter einer Creative Commons-Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0 (Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz; creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/). Zur Verwendung enthaltener Inhalte, die nicht durch diese Lizenz abgedeckt wird, nehmen Sie bitte Kontakt zu uns auf.

Veröffentlicht am 05. März 2014, aktualisiert am 23. März 2014